

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

19. Band, Heft 1

8. Oktober 1938

S. 1—48

## Algebra und Zahlentheorie.

### Lineare Algebra, Polynome, Invariantentheorie:

**La Menza, Francisco:** Die linearen Ungleichungssysteme und ihre Anwendungen auf das Studium der konvexen Körper. An. Soc. Ci. Argent. 121, 209—248; 122, 86—122, 297—310, 381—394 (1936); 124, 157—175 u. 248—269 (1937) [Spanisch].

Die bisher erschienenen 3 Kapitel enthalten eine mit vielen Zahlenbeispielen versehene, rein algebraische Theorie der endlichen normalen Systeme von linearen Ungleichungen (l. U.), d. h. der Systeme  $xa + c > 0$ , wo  $x = (x_i)$ ,  $a = (a_{ik})$ ,  $c = (c_k)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$  und  $r$  der Rang der Matrix  $a$  ist. Zweck dieser Theorie ist, die (insbes. topologischen) Probleme betreffend des von den Lösungssystemen  $x$  gebildeten konvexen Polyeders (P.) (oder allgemeineren Gebietes)  $\{x\}$  auf Fragen in bezug auf die Unterdeterminanten von  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  zurückzuführen. Den zentralen Begriff der Methode des Verf. bildet die Resolvente (R.), auf die alle Kriterien und Sätze Bezug nehmen. Bei freiem  $x \in R_n$  bilden die Werte  $y = xa + c$  eine  $r$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit  $S_r \subset R_m$ , etwa  $yb + d = 0$ ; letzteres System ist die R.  $y > 0$  schneidet dann  $S_r$  in einem mit dem ursprünglichen in allen wesentlichen Eigenschaften übereinstimmenden P.  $d = 0$  charakterisiert die Strahlenbereiche („totalsingulären Systeme“). — Infolge des Umwegs über die R. benötigt Verf. für seine Auflösungs- und sonstigen Kriterien die Vorzeichen der aus Determinanten von  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  gebildeten Determinanten, während einmalige Determinantenbildung hierfür genügt (s. dazu und für eine explizite Lösungstheorie der Systeme von l. U. die Baseler Diss. 1934 (gedruckt Jerusalem 1936) des Ref., dies. Zbl. 14, 246. — l. U.-Systeme können durch Reduktion in irreduzible (ohne überflüssige l. U.) übergeführt werden. Äquivalente Systeme bestimmen dasselbe Gebiet. Systemen mit derselben R. entsprechen (ineinander affin transformierbare) Gebiete gleicher „Figur“, zu deren Bestimmung die Kenntnis der Determinanten  $r$ -ter und  $(r+1)$ -ter Ordnung von  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  genügt. Die Vorzeichen dieser Determinanten genügen zur Bestimmung der „Form“ (topologischen Äquivalenz) des P. (noch unvollständig). — Polygone ( $n = 2$ ) werden besonders behandelt; noch erwähnenswerter als ihre Bedeutung für die Borelsche Summabilitätstheorie wäre der Fragenkreis um das Newtonsche Polygon. — Den Seiten des P.  $\{x\}$  entsprechen „benachbarte“ Untersysteme von  $xa + c > 0$ , dual den Ecken „konjugierte Permanenzen und Unterpermanenzen“ (mit Hilfe der R. charakterisierbar). Die Form des ganzen P. wird algebraisch durch eine „Permanenzenkette“ dargestellt. An dieser können auch die geometrischen Zerlegungs- und Zusammensetzungsoperationen vorgenommen werden.

Th. Motzkin (Jerusalem).

**Williamson, John:** Matrices normal with respect to an hermitian matrix. Amer. J. Math. 60, 355—373 (1938).

Verf. geht von der Bemerkung aus, daß  $A$  dann und nur dann im Schur-Toeplitz-schen Sinne normal (d. h.  $AA^* = A^*A$ ) ist, wenn  $A^*$  eine Funktion (oder, da die Matrizen als endlich vorausgesetzt sind, ein Polynom) von  $A$  ist. Indem er die Einheitsmatrix  $E$  durch eine beliebige nichtsinguläre Hermitesche Matrix  $H$  ersetzt, definiert er daher:  $A$  heißt  $H$ -normal, wenn  $H^{-1}AH$  ein Polynom von  $A^*$  ist. Die sinngemäße Definition einer  $H$ -unitären Matrix  $C$  ist dann  $CHC^* = H$ , da dann  $A$  und  $CAC^{-1}$  gleichzeitig  $H$ -normal sind. Mittels einer Methode, die auch die explizite Herstellung von Normalformen gestattet, gelingt es nun, das vollkommene Invariantensystem der



$H$ -normalen Matrizen unter  $H$ -unitären Ähnlichkeitstransformationen aufzustellen. Die Beweise sind erheblich schwieriger als in dem wohlbekannten Spezialfall  $H = E$ , der einfach auf die simultane unitäre Äquivalenz mit einer Diagonalmatrix hinausläuft und daher, im Gegensatz zu dem allgemeinen Fall, keine eingehende Beschreibung (Indizes) gewisser der Elementarteiler verlangt. *Wintner* (Baltimore.)

**Weitzenböck, R.: Über Trivektoren. VII.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 41, 454—461 (1938).

Es werden die linearen Beziehungen (mit konstanten Koeffizienten), welche zwischen den Syzygien dritter Art bestehen, abgeleitet (V. u. VI. vgl. dies. Zbl. 18, 242 u. 341). Es stellt sich heraus, daß es genau 783 irreduzible Syzygien dritter Art gibt.

*J. Haantjes* (Amsterdam).

**Molenaar, P. G.: Über Differentialkovarianten erster Ordnung der binären kubischen Differentialform.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 41, 638—642 (1938).

Eine binäre kubische Differentialform  $f$  besitzt eine quadratische Differentialkovariante  $N(f)$  und eine kubische Differentialkovariante  $Q(f)$ . Nun wird  $N(Q(f))$  ausgerechnet.

*van der Waerden* (Leipzig).

### **Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:**

**Akizuki, Yasuo: Zur Idealthorie der einartigen Ringbereiche mit dem Teilerketten-  
satz.** J. Math. 14, 85—102 (1938).

**Akizuki, Yasuo: Zur Idealtheorie der einartigen Ringbereiche mit dem Teilerketten-  
satz. II.** Jap. J. Math. 14, 177—187 (1938).

Ausführliche Darstellung der in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 16, 387) angegebenen Sätze.

*G. Köthe* (Münster i. W.).

**Linnik, U.: Generalization of Frobenius theorem and its connection with Hurwitz's theorem on composition of quadratic forms.** Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 1, 41—51 u. engl. Zusammenfassung 52 (1938) [Russisch].

Die verallgemeinerte Quaternionenalgebra von Cayley und ihre Teilalgebren sind die einzigen reellen Algebren vom Range 2 mit der Eigenschaft, daß für alle ihre Elemente  $a, b, b \neq 0$ , die Gleichung  $(ab)b' = b'(ba) = a$  gilt. Das ist eine Verallgemeinerung des Frobeniusschen Satzes über reelle assoziative Algebren ohne Nullteiler. Daraus folgt auch ein Satz von Hurwitz über die Komposition der quadratischen Formen.

*A. Kurosch* (Moskau).

**Brauer, Richard: On normal division algebras of index 5.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 243—246 (1938).

$D$  sei normale Divisionsalgebra 5. Grades über dem Körper  $F$ . Es lassen sich dann drei solche aufeinanderfolgende Erweiterungen höchstens der Grade 2, 2, 3 von  $F$  angeben, daß  $D$  als Algebra über diesem Erweiterungskörper zyklisch wird.

**Albert, A. Adrian: Quadratic null forms over a function field.** Ann. of Math., II. s. 39, 494—505 (1938).

Quadratic forms  $f(x_1, \dots, x_m)$  with coefficients in a field  $K$  of algebraic functions of one indeterminate over a finite field of constants are here treated. As for algebraic number fields, every  $f$  with  $m \geq 5$  is a null form (i.e., properly represents zero). This theorem, stated without explicit proof by Witt (this Zbl. 15, 57) for characteristic  $p \neq 2$ , is proven by the author for any  $p$ . For  $p \neq 2$  the diagonal form  $f_0 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2$  is a partial norm form of the quaternion algebra  $Q = (1, i, j, ij)$  with  $i^2 = -a_3/a_2, j^2 = -a_2/a_1, ji = -ij$  over  $K$ , while the theorem for diagonal forms with more variables is reduced to this case by a Chinese remainder theorem construction of extensions which split  $Q$ . — For  $p = 2$ , consider more general pure forms  $f = \sum b_i x_i^q$  of degree  $q = p^r$ , coefficients  $b_i$  in a function field  $K$  of  $r$  indeterminates with perfect constant field. For any  $p$ ,  $K$  is separable over suitable indeterminates and has an extension of degree  $q^r$  containing  $q$ -th roots of all elements in  $K$ ; hence every  $f$  with  $m > q^r$  is a null form. For 5 variables,  $r = 1, p = 2$ , this gives the original theorem for  $f$  in suitable normal form. Quadratic



forms with  $m > 5$ ,  $r = 1$ ,  $p = 2$  are null if and only if corresponding algebras have specified properties; thus the ternary form  $f = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + x_1 x_2$  is  $a_3^{-1}$  times a norm form of the algebra  $Q(1, i, j, ij)$  with  $i^2 = i + a_1 a_2$ ,  $j^2 = 1/a_1 a_3$ ,  $ji = (i+1)j$ , and  $f$  is null if and only if  $Q$  is a total matrix algebra. *Saunders MacLane.*

**Schmid, Hermann Ludwig:** Über die Automorphismen eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik. *J. reine angew. Math.* 179, 5—15 (1938).

$K$  sei algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht  $g$  mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper  $k$ . Als Hauptsatz wird bewiesen, daß bei  $g > 1$  die Gruppe der  $k$  elementweise festlassenden Automorphismen von  $K$  endlich ist. Zum Beweis werden die Weierstraßpunkte herangezogen, die hier nach F. K. Schmidt so definiert werden:  $\mathfrak{P}$  heißt Weierstraßpunkt, wenn nur endlich viele Primdivisoren die gleichen Lückenexponenten wie  $\mathfrak{P}$  besitzen. Im Gegensatz zum bekannten klassischen Fall können bei Primzahlcharakteristik Komplikationen auftreten, die neue Betrachtungen erforderlich machen, bei denen eine jedem Primdivisor zugeordnete normierte Erzeugung von  $K$  die Hauptrolle spielt. (Wie an hyperelliptischen Beispielen gezeigt wird, treten diese Komplikationen auch wirklich auf.)

*Reichardt (Leipzig).*

**Tornheim, Leonard:** Sums of  $n$ -th powers in fields of prime characteristic. *Duke math. J.* 4, 359—362 (1938).

Let  $F$  be a finite field of prime characteristic  $p$ . The main results proved are as follows: (1) If  $F$  is a finite field, then any element of  $F$  which is expressible as a sum of  $n$ -th powers is a sum of  $n$   $n$ -th powers. This follows easily from the consideration of the elements representable by  $r$   $n$ -th powers but not by  $r-1$ , where  $r = 1, 2, \dots$  (2) If  $p > n$ , every element of  $F$  is a sum of  $n(n+1)$   $n$ -th powers. This is proved by solving the linear equations  $(a+r)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} r + \dots + r^n$  ( $r = 1, 2, \dots, n-1$ ), with  $a, a^2, \dots, a^{n-1}$  as unknowns, for  $a$ . (3) If  $F$  is infinite, and  $p \nmid n$ , then every element of  $F$  is expressible as a sum of  $n$ -th powers. (4) If  $q$  is a prime, there is at most one perfect field of characteristic  $p$  for which not every element is a sum of  $q$ -th powers. Such a field exists if and only if  $q = 1 + p^f + p^{2f} + \dots + p^{mf}$ .

*Davenport (Manchester).*

**Chabauty, Claude:** Sur les équations diophantiennes liées aux unités d'un corps de nombres algébriques fini. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 17, 127—168 (1938).

In der vorliegenden Arbeit werden Untersuchungen von Th. Skolem über die Darstellung von Zahlen durch zerlegbare Formen im Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen Einheiten und der  $p$ -adischen Zahlen verallgemeinert und weitergeführt [s. das letzte Kapitel von Skolem, Diophantische Gleichungen. *Erg. d. Math.* 5, 4 (1938), wo auch die früheren Arbeiten des Verf. besprochen werden]. — Unter  $H_p$  werde eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung des Körpers  $R_p$  der  $p$ -adischen Zahlen verstanden; die wie üblich durch  $|p|_p = 1/p$  normierte Bewertung  $|x|_p$  von  $R_p$  werde in  $H_p$  fortgesetzt. Alsdann sei  $X^*$  der  $n$ -dimensionale Raum aller Punkte  $(x_1, \dots, x_n)$ , wo die Koordinaten in  $H_p$  liegen und wo im Raum eine Metrik etwa durch  $\text{Dist}(a', a'') = \sum_{h=1}^n |a'_h - a''_h|_p$  definiert ist. Das erste Kapitel handelt von in einem Punkt  $A: (a_1, \dots, a_n)$  von  $X^*$  algebraischen Mannigfaltigkeiten (kurz A.M.), d. h. der Gesamtheit aller Nullpunkte eines Ideals von Potenzreihen

$$\sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} c_{h_1 \dots h_n} (x_1 - a_1)^{h_1} \dots (x_n - a_n)^{h_n}$$

mit Koeffizienten aus  $H_p$ , die in einer Umgebung von  $A$  konvergieren. Der Verf. leitet ein  $p$ -adisches Analogon zur Formel und zum Lemma von Weierstraß her und zeigt, daß die Punkte einer irreduziblen (d. h. durch ein Primideal definierten) A.M. durch endlich viele Weierstraßelemente gegeben werden wie im komplexen Fall (s. Skolem, l. c., und W. Rückert, *Math. Ann.* 107, 259—281; dies. Zbl. 5, 98). — Im zweiten Kapitel wird der Begriff der  $\mu$ -Mannigfaltigkeit (kurz  $\mu$ -M.) der Dimension  $r$  eingeführt; das ist die Gesamtheit aller Punkte  $X: x_1, \dots, x_n$  in  $X^*$  der Form

$$x_j = q_j a_{j1}^{v_1} \dots a_{jr}^{v_r}, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

wo die  $q_j \neq 0$  sind, die  $p$ -adischen Logarithmen  $\log a_{ji}$  existieren, genügend klein sind und eine Matrix  $(\log a_{ji})$  vom Rang  $r$  haben, und die  $v_i$  alle genügend kleinen Zahlen aus  $H_p$  durch-



laufen. Verf. untersucht den Durchschnitt einer  $\mu$ -M. mit einer A.M. und speziell einer algebraischen M. Diese Resultate wendet er an auf die Abelschen Gruppen  $\Gamma$  von Punkten  $(x_1, \dots, x_n)$  mit algebraischen Koordinaten  $\neq 0$ ; dabei wird das Produkt definiert durch

$$(x_1, \dots, x_n)(x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 x'_1, \dots, x_n x'_n).$$

Sei  $\Gamma$  vom Rang  $r$ , d. h. bestehe seine Basis aus  $r$  Elementen unendlicher und endlich vielen endlicher Ordnung. Wählt man dann die Primzahl  $p$  geeignet, so gibt es eine Untergruppe  $\Gamma^*$  endlichen Indexes von  $\Gamma$  und eine  $\mu$ -M.  $M$  der Dimension  $r$ , so daß alle Elemente von  $\Gamma^*$  erhalten werden, wenn man die Exponenten  $y_1, \dots, y_r$  der Elemente von  $M$  die ganzen rationalen Zahlen durchlaufen läßt. Aus den Ergebnissen über A.M. und  $\mu$ -M. folgt jetzt der wichtige Satz: „Die Abelsche Gruppe  $\Gamma$  vom Range  $r$  habe mit der durch die Gleichungen

$$F_h(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, s')$$

mit algebraischen Koeffizienten definierten algebraischen Mannigfaltigkeit der Dimension  $s$  einen Durchschnitt  $E$  aus unendlich vielen Punkten. Zu jeder unendlichen Teilmenge  $E'$  von  $E$  gibt es dann eine Untergruppe  $\gamma$  von  $\Gamma$  mit folgenden Eigenschaften: 1. Wenigstens eine Restklasse  $\Gamma/\gamma$  enthält eine unendliche Teilmenge von  $E'$ . 2. Sei  $\sigma = s + r$ . Zwischen  $\sigma$  Koordinaten  $x_{q_1}, \dots, x_{q_\sigma}$  jedes Elements  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $\gamma$  besteht die Gleichung

$$x_{q_1}^{N_1} \dots x_{q_\sigma}^{N_\sigma} = 1,$$

wo die Exponenten allein von den Indizes  $q$  abhängen, ganz rational und nicht alle Null sind.“ — Im letzten Kapitel werden Systeme Diophantischer Gleichungen

$$\text{Norm}(X_1 \omega_1 + \dots + X_n \omega_n) = \mp 1, \quad (1)$$

$$F_j(X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

in ganzen rationalen Unbekannten  $X_1, \dots, X_n$  betrachtet; dabei ist  $\omega_1, \dots, \omega_n$  die Basis eines endlichen algebraischen Zahlkörpers  $K$  vom Grad  $n$ , und die  $F_j$  sind Polynome mit rationalen Koeffizienten. Von den Konjugierten zu  $K$  seien  $r_1$  reell,  $2r_2$  komplex konjugiert, und es werde  $r = r_1 + r_2 - 1$  gesetzt. Sei die durch (1) und (2) bestimmte algebraische M. von der Dimension  $s$ . Jeder Lösung dieser Gleichungen entspricht eineindeutig eine Einheit

$$\varepsilon = X_1 \omega_1 + \dots + X_n \omega_n$$

von  $K$  mit ihren Konjugierten. Sei  $E$  die als unendlich angenommene Menge aller Einheiten  $\varepsilon$ , die (1) und (2) genügen. Aus dem obigen Satz über Gruppen folgt dann: „Zu jeder unendlichen Teilmenge  $E'$  von  $E$  gibt es eine Untergruppe  $\gamma$  der Gruppe  $\Gamma$  aller Einheiten von  $K$  mit folgenden Eigenschaften: 1. In wenigstens einer Restklasse von  $\Gamma/\gamma$  liegen unendlich viele Elemente von  $E'$ . 2. Sei  $\sigma = r + s$ . Zwischen den Konjugierten  $\varepsilon^{(q_1)}, \dots, \varepsilon^{(q_\sigma)}$  jeder Einheit aus  $\gamma$  besteht dann die Relation

$$\varepsilon^{(q_1)N_1} \dots \varepsilon^{(q_\sigma)N_\sigma} = 1,$$

wo die Exponenten  $N$  allein von den Indizes  $q$  abhängen, ganz rational und nicht alle Null sind.“ — Um diesen Satz anzuwenden, kann man einmal spezielle Annahmen über die Galoisgruppe  $G$  von  $K$  machen; dann ergibt sich u. a.: „Ist  $K$  vom Primzahlgrad oder  $G$  die symmetrische Gruppe, so liegen höchstens endlich viele Einheiten von  $K$  in einem Modul der Dimension  $\leq n - r$ .“ Weiter kann man die Mannigfaltigkeit spezialisieren, in der unendlich viele Einheiten liegen sollen, etwa annehmen, daß  $K$  durch Adjunktion der linear unabhängigen Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}$  zum Körper der rationalen Zahlen entsteht, und dann die Einheiten im Modul  $M = [1, \alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}]$  betrachten. Dann folgt z. B.: „Ist  $h = 2$ ,  $K$  nicht total-reell, so liegen in  $M$  höchstens endlich viele Einheiten von  $K$ “ (Spezialfall des Thueschen Satzes, s. Skolem, l. c.). „Für  $h = 3$  liegen dann und nur dann unendlich viele Einheiten von  $K$  in  $M = [1, \alpha_1, \alpha_2]$ , wenn  $M$  zwei Zahlen  $\varphi$  und  $\psi$  enthält, so daß  $\varphi$  eine Einheit von  $K$  und  $\psi/\varphi$  eine reell-quadratische Irrationalzahl ist.“ Hat speziell  $K$  zwei Paare komplex-konjugierter Körper, so trifft dies nie zu. In diesem Fall hat die Ungleichung

$$|X + Y\alpha_1 + Z\alpha_2| < \text{constans} \cdot \{|X| + |Y| + |Z|\}^{-(n-1)}$$

höchstens endlich viele Lösungen.

Mahler (Manchester).

Rédei, L.: Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendung auf die Theorie der quadratischen Zahlkörper. Mat. természett. Értes. 56, 807—845 u. deutsch. Zusammenfassung 846—847 (1937) [Ungarisch].

Verf. führt das folgende Symbol  $(a_1, a_2, a_3)$  ein: Es seien  $a_1, a_2, a_3$  relativ prime ganze rationale Zahlen  $\equiv 1 \pmod{4}$  und  $a_1$  quadratischer Rest nach jedem zu  $a_1$  primem Primfaktor von  $a_2 a_3$ .  $a_2, a_3$  seien relativ prime ganze Ideale in  $R(\sqrt{a_1})$  mit der Norm  $a_2$  bzw.  $a_3$ . Existiert ein Hauptideal  $\alpha_2$  in  $R(\sqrt{a_1})$ , welches sich von  $a_2$  nur um einen quadratischen Faktor unterscheidet und mod 4 quadratischer Rest ist, ist der Wert des 2ten Potenzrestsymbols  $\left(\frac{\alpha_2}{a_3}\right)$  von der Wahl der Elemente  $a_2, a_3, \alpha_2$  unabhängig,



so wird dieser Wert mit  $(a_1, a_2, a_3)$  bezeichnet. Mit Hilfe dieses Symbols läßt sich die Anzahl  $e_8$  der unabhängigen Klassen achter Ordnung eines quadratischen Zahlkörpers  $R(\sqrt{D})$  mit der Diskriminante  $D$  besonders einfach ausdrücken.  $e_8$  ist bekanntlich gleich der Anzahl der unabhängigen  $D$ -Zerfällungen  $(D_1, D_2)$  3. Art (s. z. B. dies. Zbl. 7, 396). Nun wird gezeigt, daß  $D_1, D_2$  dann und nur dann von der 3. Art ist, wenn jedes existierende Symbol  $(D_1, D_2, m) = 1$  ist, wenn  $m$  die quadratfreien Teiler von  $D$  durchläuft.

Taussky (London).

Rédei, Ladislaus: Die durch 2, 4 und 8 teilbaren Invarianten in der absoluten Klassengruppe der quadratischen Zahlkörper. Mat. természett. Értes. 56, 848—852 u. deutsch. Zusammenfassung 853 (1937) [Ungarisch].

Mit Hilfe der Ergebnisse der vorsteh. ref. Arbeit wird bewiesen, daß es unendlich viele quadratische Zahlkörper mit beliebig vorgegebenen  $e_2, e_4, e_8$  gibt ( $e_i$  = Anzahl der durch  $2^i$  teilbaren Invarianten der absoluten Klassengruppe im engeren Sinn).

Taussky (London).

### Zahlentheorie:

Singer, James: A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 377—385 (1938).

Points in a finite projective plane are given homogeneous coordinates in Galois field  $GF(p^n)$ . Associating each point with a unique element in  $GF(p^{3n})$  it is shown that there exists a collineation  $C$  such that if  $A$  and  $B$  denote points a power of  $C$  transforms  $A$  into  $B$ . It follows that points can be arranged in a "regular" rectangular array (an array in which each row contains all points, each column contains all points of a line, each row is a cyclic permutation of the first). Subscripts assigned to the points and so arrayed show that if  $m$  is a power of a prime there exists a set of  $m+1$  integers (called a "perfect difference set")  $d_0, d_1, \dots, d_m$  such that the  $m^2 + m$  differences  $d_i - d_j$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 0, 1, \dots, m$ ) are congruent, modulo  $q = m^2 + m + 1$ , to the integers  $1, 2, \dots, m^2 + m$ . This leads to a perfect partition  $a_0, a_1, \dots, a_m$  of  $q$ ; i. e., each residue class modulo  $q$  is represented uniquely by a circular sum of the  $a$ 's (sum of consecutive  $a$ 's). The number of perfect difference sets corresponding to a given  $q$  is discussed. A partial list of perfect difference sets and perfect partitions is given. The concepts are generalized for  $q = p^{kn} + p^{(k-1)n} + \dots + p^n + 1$ . J. L. Dorroh.

Rosser, Barkley, and R. J. Walker: On the transformation group for diabolic magic squares of order four. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 416—420 (1938).

Kulakoff, A.: Sur quelques propriétés des nombres de la forme  $a^m + b^m$ . Enseignement Math. 37, 73—76 (1938).

The author proves some obvious results, such as: if  $(a, b) = 1$  then  $(a^m - b^m, a^n - b^n) = a^{(m,n)} - b^{(m,n)}$ .

Davenport (Manchester).

Lehmer, Emma: On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson. Ann. of Math., II. s. 39, 350—360 (1938).

A difference equation for certain Bernoulli polynomials is employed to obtain the residues modulo  $p^2$  and  $p^3$ ,  $p$  a prime, of the  $B$ -numbers in terms of sums of like powers of numbers in arith. prog. [cf. Glaisher, Quart. J. Math. 32, 271—305 (1901), for the method and for results mod  $p$ ]. The residues of the values of the polynomials for certain fractions with small denominators are known and yield results which may be expressed in terms of Fermat's quotients:  $q_a = (a^{p-1} - 1)/p$ ,  $(a, p) = 1$ , and Wilson's quotient. The residues for certain sums of reciprocals of numbers in arith. prog. and binomial coefficients are also given. These, combined with the conditions  $q_2 \equiv 0$  and  $q_3 \equiv 0 \pmod{p}$ , of Wieferich and Mirimanoff, resp., for the first case of Fermat's Last Theorem, yield the following. The equation  $x^p + y^p + z^p = 0$  has no solutions prime

to  $p$  unless (1)  $\sum_{r=1}^{[p/n]} \frac{1}{r} \equiv 0 \pmod{p}$  for  $n = 2, 3, 4, 6$ , and unless (2)  $\binom{p-1}{[p/n]} \equiv (-1)^{[p/n]}$



(mod  $p^2$ ) for  $n = 2, 3, 4, 5, 6$ . A large number of known results modulo  $p$ , due to various authors, are included in the extensions to the modulus  $p^2$  of the present paper. *Hull* (Vancouver, B.C.).

**Fogels, E.:** The general rational solution of the equation  $ax^2 - by^2 = z^3$ . *Amer. J. Math.* 60, 734—736 (1938).

Die rationalen Lösungen der Gleichung  $ax^2 - by^2 = z^3$  mit  $yz \neq 0$  sind  $x = as(s^2 - ab)t^3$ ,  $y = a^2(s^2 - ab)t^3$ ,  $z = a(s^2 - ab)t^2$  mit beliebigen rationalen  $s$  und  $t$ . (Anm. d. Ref.: Diese Parameterdarstellung hätte man in bekannter Weise auch erhalten können, indem man die kubische Fläche mit allen durch ihren Doppelpunkt  $0, 0, 0$  gehenden rationalen Geraden schneidet.) *Reichardt* (Leipzig).

**Brauer, Alfred:** Über die Dichte der Summe zweier Mengen, deren eine von positiver Dichte ist. *Math. Z.* 44, 212—232 (1938).

Let  $A$  be a sequence of positive integers  $a$  of density  $\alpha > 0$  [ $\alpha$  is the lower bound of  $A(n)/n$  for  $n = 1, 2, \dots$ , where  $A(n)$  is the number of  $a$ 's not exceeding  $n$ ]. Let  $B$  be a sequence of positive integers  $b$  containing 1, and let  $g(m)$  denote the least number of summands in any representation of  $m$  as a sum of  $b$ 's. Suppose that, for all  $n$ ,

$$\sum_{m=1}^n g(m) \leq \lambda n.$$

Let  $C$  be the sequence formed by all numbers  $a$  and  $a + b$ . Landau's modification of Erdős's theorem (see Landau, *Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie*, Cambridge 1937) asserts that the density  $\gamma$  of  $C$  satisfies

$$\gamma \geq \alpha \left(1 + \frac{1 - \alpha}{2\lambda}\right).$$

This paper is devoted to a proof of the stronger inequality

$$\gamma \geq \alpha \left(1 + \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{\lambda}\right).$$

It is impossible to summarise the argument here, but the main weapon is the inequality

$$\sum_{m=1}^{n-\mu n} \{A(n-m) - \alpha(n-m)\} + \frac{1}{2}(A(n) - \alpha n) \geq \frac{1}{2}\alpha\mu n,$$

which is shown to hold for certain values of  $\mu$ , including  $\mu = 1 - \sqrt{\alpha}$ .

*Davenport* (Manchester).

**Tchudakoff, N.:** On the density of the set of even numbers which are not representable as a sum of two odd primes. *Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math.* Nr 1, 25—39 u. engl. Zusammenfassung 40 (1938) [Russisch].

It is proved that the number of even integers  $\leq x$  not expressible as sums of two primes is  $O(x/\log^M x)$  for every fixed positive  $M$ . The proof (of which an outline is given in *C. R. Acad. Sci. URSS* 17, No. 7; this *Zbl.* 18, 6) is by the Hardy-Littlewood method with the new ideas introduced by Vinogradoff (see this *Zbl.* 16, 291—292). The result implies Vinogradoff's theorem that every sufficiently large odd integer is a sum of three primes. — The same result has been proved also by van der Corput (this *Zbl.* 18, 52) and by Estermann [*Proc. London Math. Soc.* (2) 44, 307—314].

*Ingham* (Cambridge).

**Ostmann, Hans-Heinrich:** Beweis eines Satzes von A. S. Besicovitch über die Dichte der Summe zweier Zahlenmengen. *Math. Z.* 44, 319—320 (1938).

The author claims to give in a few lines a proof of Besicovitch's theorem (see Landau, *Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie* [Cambridge 1937], or this *Zbl.* 12, 394). The proof is incorrect, since the inequality  $B(m-1) \geq \beta^* m$  is valid only for  $m \geq 2$ . The theorem is also incorrectly quoted, and in the form enunciated it is obviously false.

*Davenport* (Manchester).



**Perron, Oskar:** Neuer Beweis eines Satzes von Minkowski. *Math. Ann.* 115, 656—657 (1938).

Besonders einfacher, rein arithmetischer Beweis des folgenden Satzes: Sind  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$  reelle Zahlen mit  $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ , so gibt es ganze rationale Zahlen  $x, y$  mit

$$-\frac{1}{4} \leq \{\alpha(x - \mu) + \beta(y - \nu)\} \{\gamma(x - \mu) + \delta(y - \nu)\} \leq \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Zunächst wird leicht gezeigt, daß es teilerfremde ganze  $p$  und  $r$  mit

$$|(\alpha p + \beta r)(\gamma p + \delta r)| \leq 1$$

gibt; seien  $q$  und  $s$  ganze Zahlen mit  $ps - qr = 1$ . Alsdann wird (1) durch die Substitution

$$x = pX + qY, \quad y = rX + sY; \quad \mu = pM + qN, \quad \nu = rM + sN$$

auf die Gestalt

$$-\frac{1}{4} \leq A(X - M)^2 + B(X - M)(Y - N) + C(Y - N)^2 \leq \frac{1}{4} \quad (2)$$

gebracht, wo  $|A| = |(\alpha p + \beta r)(\gamma p + \delta r)|$  und  $B^2 - 4AC = 1$ . — Indem Verf. nun (2) folgendermaßen schreibt ( $A \neq 0$ ):

$$-\frac{1}{4} \leq A(X - KY - L)^2 - \frac{1}{4A}(Y - N)^2 \leq \frac{1}{4},$$

kann er leicht ganze  $X$  und  $Y$  mit (2) angeben; für  $A = 0$  ist das trivial. *J. F. Koksma.*

**Koksma, J. F.:** Über einen Dirichlet-Minkowskischen Approximationssatz. *Mathematica*, Zutphen B 6, 113—131 u. 171—181 (1937).

Die Gesetze der Approximation einer reellen Irrationalzahl  $\alpha$  durch rationale Zahlen werden durch systematische Untersuchung derjenigen Zahlenpaare  $x, y$  ( $x$  und  $y$  bedeuten stets ganze Zahlen) abgeleitet, welche den Ungleichungen

$$1 \leq x \leq t, \quad |\alpha x - y| \leq t^{-1} \quad (1)$$

bei beliebig vorgegebenem  $t \geq 1$  genügen (im Text [Formel (2)] fehlt das Absolutzeichen). Bei gegebenem  $t \geq 1$  sei  $x_{\min}(t)$  das kleinste  $x$ , zu welchem es ein  $y$  mit (1) gibt. Wächst  $t$  von 1 bis  $\infty$ , so durchläuft  $x_{\min}(t)$  eine Folge  $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ ;  $y_n$  werde so gewählt, daß  $|\alpha x_n - y_n|$  möglichst klein ausfällt. Man setze noch  $\alpha x_n - y_n = \eta_n t_n^{-1}$  ( $\eta_n = \pm 1, t_n > 0$ ). Mit Hilfe der Folgen  $x_n, y_n, t_n, \eta_n$  werden dann die Sätze von Vahlen [*J. reine angew. Math.* 115, 221—233 (1895)], Hurwitz [*Math. Ann.* 39, 279—281 (1891)], Borel [*J. Math. pures appl.* (5) 9, 329—375 (1903)], Humbert [*J. Math. pures appl.* (7) 2, 155—167 (1916)], Khintchine [*Rend. Circ. mat. Palermo* 50, 170—195 (1926)], Morimoto [*Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.* (3) 10, 171—174 (1928)] bewiesen und es werden alle Paare  $(x, y)$  angegeben, die bei gegebenem  $t \geq 1$  den Ungleichungen (1) genügen; auch das Gesetz der besten Näherung [aus  $1 \leq x < x_{n+1}$ ,  $(x, y) \neq (x_n, y_n)$  folgt  $|\alpha x - y| > |\alpha x_n - y_n|$ ] wird bewiesen. Alles ohne Benutzung der Kettenbrüche; erst zum Schluß wird gezeigt, daß die Brüche  $y_n/x_n$  mit den Näherungsbrüchen der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung von  $\alpha$  übereinstimmen (abgesehen eventuell von den ersten Gliedern). *Jarník (Praha).*

**Pisot, Charles:** La répartition modulo un et les nombres algébriques. Paris: Diss. 1938. 44 pag.

In dieser Dissertation handelt es sich um die asymptotische Verteilung modulo Eins gewisser Folgen reeller Zahlen  $u_n = f_n(\alpha)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), wo  $\alpha$  ein reeller Parameter, z. B. des Intervalles  $a \leq \alpha \leq b$  darstellt. Mit Hilfe des Weylschen Kriteriums hat Ref. gezeigt, daß unter gewissen Bedingungen für das Wachstum i. B. auf  $n$  und für die Regularität i. B. auf  $\alpha$  eine solche Folge für fast alle  $\alpha$  aus  $a \leq \alpha \leq b$  gleichverteilt (mod 1) ist (dies. Zbl. 12, 14). Verf. untersucht die Ausnahmemenge vom Maß Null derjenigen  $\alpha$ , für die die Gleichverteilung nicht zutrifft. Er betrachtet dazu neben der Folge  $u_1, u_2, \dots$  die Folge  $a_1, a_2, \dots$ , wo  $a_n$  die zu  $u_n$  nächstliegende ganze Zahl bedeutet; unter einfachen Bedingungen liefern zwei verschiedene Zahlen  $\alpha$  auch verschiedene Folgen  $a_1, a_2, \dots$ . Durch Elimination von  $\alpha$



aus  $u_n = f_n(\alpha)$ ,  $u_{n+1} = f_{n+1}(\alpha)$  entsteht eine rekurrente Beziehung

$$u_{n+1} = F_n(u_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

(im Fall  $u_n = \alpha^n$  ( $\alpha > 1$ ) hat man z. B.  $u_{n+1} = u_n^{\frac{n+1}{n}}$ ). — Man betrachte jetzt die Folge  $u_1 - a_1, u_2 - a_2, \dots$ . Verlangt man, daß das  $n^{\text{te}}$  Glied dieser Folge hinreichend nahe an Null oder allgemeiner hinreichend nahe an dem  $n^{\text{ten}}$  Glied  $\gamma_n$  einer vorgegebenen Folge  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  des Intervalles  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  liegt, so zieht (1) in den von Verf. betrachteten Fällen eine rekurrente Beziehung

$$a_{n+1} = \Phi_n(a_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

nach sich. Das heißt: Die Folge  $a_1, a_2, \dots$  ist wegen (2) durch das erste Glied  $a_1$  schon bestimmt, also: Es gibt höchstens abzählbar viele Folgen  $a_1, a_2, \dots$  der verlangten Art, also: Es gibt höchstens abzählbar viele  $\alpha$ , für die die zugehörige (offenbar nichtgleichverteilte) Folge  $u_1, u_2, \dots$  die verlangte Eigenart zeigt. Kann man aber andererseits (wie es dem Verf. in mehreren Fällen tatsächlich gelingt) bei jeder Folge  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  des Intervalles  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  die Existenz derartiger  $\alpha$  wirklich nachweisen, so hat man offenbar gezeigt, daß die Folge  $u_n = f_n(\alpha)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) für eine Menge von Zahlen  $\alpha$  kontinuierlicher Mächtigkeit nicht gleichverteilt (mod 1) ist. — Aber auch die Untersuchung der so bestimmten speziellen Zahlen  $\alpha$  liefert oft interessante Ergebnisse, z. B. im Fall  $u_n = \lambda \alpha^n$  ( $\lambda > 0$ ,  $\alpha > 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) (wo man  $\lambda$  fest und  $\alpha$  als Parameter, jedoch auch  $\alpha$  fest und  $\lambda$  als Parameter sowie  $\lambda$  und  $\alpha$  beide als Parameter auffassen kann), wo Verf. zu einigen bemerkenswerten Klassen algebraischer Zahlen geführt wird (Kap. III, IV). — Verf. beschränkt sich nicht auf Folgen von Zahlen  $f_n(\alpha)$ , die von einem einzigen Parameter  $\alpha$  abhängen, sondern wendet die obigen Grundgedanken auf  $r \geq 1$  simultanen Folgen  $f_{n,h}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  ( $h = 1, 2, \dots, r$ ), wo  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  als Punkt im  $R_r$  gedeutet wird, an. In Kap. I werden die allgemeinen Methoden entwickelt und einige sehr allgemeine Sätze bewiesen; in den übrigen Kap. II bis IV werden diese Methoden auf solche Folgen angewandt, die einer linearen rekurrenten Beziehung unterliegen und sich demnach schreiben lassen:

$$u_n = \lambda_1(n) \alpha_1^n + \lambda_2(n) \alpha_2^n + \dots + \lambda_r(n) \alpha_r^n,$$

wo die  $\lambda_e(n)$  Polynome mit reellen Koeffizienten sind. Es wird sowohl der Fall betrachtet, daß diese Koeffizienten fest sind und die  $\alpha_e$  variabel, wie auch die Fälle, daß die Koeffizienten variabel sind und die  $\alpha_e$  fest oder ebenfalls variabel. (In jedem dieser Fälle trifft die oben skizzierte Methode zu.) Von den Ergebnissen seien nur einige speziellere erwähnt (vgl. auch die Referate vorbereitender Noten, dies. Zbl. 13, 295; 14, 345; 16, 53, 392): I. Sei  $u_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n + \dots + \lambda_r \alpha_r^n$  ( $n \geq 0$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  feste Zahlen) das allgemeine Glied einer reellen Folge. Sei  $\gamma_0, \gamma_1, \dots$  eine Folge reeller Zahlen und werde  $u_n \equiv \gamma_n + \varepsilon_n \pmod{1}$  gesetzt. Es bedeute  $A$  ein Gebiet innerhalb eines der Teile des  $R_r$ , welche von  $\alpha_h = \alpha_k$  ( $h \neq k$ ),  $|\alpha_h| \geq 1$  ( $1 \leq h \leq r$ ,  $1 \leq k \leq r$ ) begrenzt werden. Dann gibt es höchstens abzählbar viele  $r$ -Tupel  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  für die von einem gewissen Index  $n_0$  ab

$$|\varepsilon_n| < \frac{n-r}{(2+\varepsilon)n} \frac{1}{\prod_{h=1}^r (|\alpha_h| + 1)}$$

gilt, aber es gibt in  $A$  Werte  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ , für die von einem gewissen Index  $n_0$  ab

$$|\varepsilon_n| < \frac{1+\varepsilon}{2 \prod_{h=1}^r (|\alpha_h| - 1)}$$

gilt ( $\varepsilon$  bedeutet eine beliebig zu wählende Zahl  $> 0$ ). — II. Notwendig und hinreichend für die Transzendenz der reellen Zahl  $\lambda$  ist die Divergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(\pi \lambda x^n)$$

für alle reellen  $x \geq 1$ .

J. F. Koksma (Amsterdam).



**Lehmer, D. H.:** A cotangent analogue of continued fractions. *Duke math. J.* 4, 323—340 (1938).

Untersuchung von Ausdrücken der Form  $\cot \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \operatorname{arccot} n_v \dots (1)$ , wo die  $n_v$  ganze Zahlen bedeuten. (1) heißt regulär: 1. wenn die Reihe abbricht mit  $n_k$  und  $n_k > n_{k-1}^2 + n_{k-1} + 1$ ,  $n_v > 0$ , und 2. wenn die Reihe unendlich ist und  $n_v \geq n_{v-1}^2 + n_{v-1} + 1$ ,  $n_v > 0$  ist. Jede unendliche Reihe (1), welche regulär ist, konvergiert also (und zwar außerordentlich stark). Zwei reguläre Formen (1) sind nur dann gleich, wenn sie identisch sind. Durch folgenden Algorithmus kann man eine positive Zahl  $x$  in eine reguläre Form (1) entwickeln:  $x_0 = x$ ,  $n_0 = [x_0]$ ;  $x_i = \frac{x_{i-1} n_{i-1} + 1}{x_{i-1} - n_{i-1}}$ ,  $n_i = [x_i]$  für  $i = 1, 2, \dots$ ;  $x$  ist rational oder nicht, je nachdem (1) abbricht oder nicht. Dieser Algorithmus stimmt in vielen Eigenschaften mit dem Euklidischen überein und eine reguläre Form (1) mit dem regulären Kettenbruch. Die Analogie wird ausführlich untersucht. Die Zahl  $\xi$ , für welche  $n_0 = 0$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_v = n_{v-1}^2 + n_{v-1} + 1$  ist und (1) am wenigsten konvergiert, ist nicht rational und auch keine Wurzel einer Gleichung 2-ten oder 3-ten Grades. Sie wird weiter erforscht.

*N. G. W. H. Beeger.*

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Egyed, L.:** Über das Auswahlaxiom und mit ihm zusammenhängende Fragen. *Mat. fiz. Lap.* 45, 133—149 u. deutsch. Zusammenfassung 149—150 (1938) [Ungarisch].

Es wird untersucht, inwieweit gewisse allgemeine Sätze der reellen Funktionentheorie von dem Auswahlaxiom und seinen Spezialisierungen abhängen. Dabei ergibt sich die Äquivalenz gewisser Aussagen.

*Otto Szász* (Cincinnati, Ohio).

**Bernstein, Felix:** The continuum problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 24, 101—104 (1938).

The author shows that the continuum hypothesis can be derived from the following two postulates (in addition the usual ones for aggregate theory): I. If  $M_1$  is a subset of  $M$  and if it is impossible to prove that  $M_1 \neq M$ , then  $M_1 = M$ . II. If  $M_1$  is a subset of  $M$ , which is ordinally similar to  $M$ , and no element of the subset  $M - M_1$  is given, then no proof is possible that  $M_1 \neq M$ .

*H. B. Curry* (State College, Pa.).

**Šmulian, V.:** Sur les ensembles régulièrement fermés et faiblement compacts dans l'espace du type (B). *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 18, 405—407 (1938).

Der Verf. beschäftigt sich mit der schwachen Kompaktheit der Mengen und insbesondere der Einheitskugel eines abstrakten Raumes vom Typus (B) und mit der regulären Abgeschlossenheit der Unterräume des konjugierten Raumes. Er stellt einige Zusammenhänge zwischen diesen und noch einigen anderen Begriffsbildungen auf.

*Kerner* (Warszawa).

**Kempisty, Stefan:** Application des fonctions de triangle à la théorie de l'aire d'une surface courbe. *Bull. Sémin. math. Univ. Wilno* Nr 1, 5—12 (1938).

With any continuous function  $f(x, y)$  over the square  $R = [0, 1; 0, 1]$  there is associated a function  $F$  of triangles: for any triangle  $T \subset R$ ,  $F(T)$  denotes the area of the triangle which is inscribed in the surface  $z = f(x, y)$  and whose projection on the  $xy$ -plane is  $T$ . The function  $F$  is subject to the integration in the sense of Burkill with respect to the nets of triangles of parameter of regularity exceeding an arbitrarily fixed positive number  $\lambda < 1$ . The following theorems are established: (1) If  $F$  is of

bounded variation, i.e. if  $\int F < +\infty$ , then  $f(x, y)$  is absolutely continuous in the sense of Tonelli and almost everywhere completely differentiable. (2) In order that  $F$  should be integrable it is necessary and sufficient that it should be absolutely continuous; if this condition is satisfied, the area of the surface  $z = f(x, y)$  is equal to the integral of  $F$ . — Theorem (2) provides a sufficient condition for the existence of a sequence of polyhedra inscribed in a surface  $z = f(x, y)$ , converging uniformly to



the latter and having areas tending to this surface. — The note is to be related to a former paper by the author [Bull. Soc. Math. France 64, 119—132 (1936); this Zbl. 15, 10].

Saks (Warszawa).

Krzyżński, Mirosław: Sur les fonctions à variation bornée au sens de Hardy. Bull. Sémin. math. Univ. Wilno Nr 1, 13—15 (1938).

A function  $F(x, y)$  of two real variables  $x$  and  $y$  is of bounded variation in the sense of Hardy if it is of bounded variation on each line parallel to the axes, and if the function of rectangles determined by  $F$  is of bounded variation in the ordinary sense of Lebesgue. — The author proves that if a function  $F(x, y)$  is of bounded variation in the sense of Hardy, its partial derivatives, upper  $\bar{F}_x(x, y)$  and lower  $\underline{F}_x(x, y)$ , are of bounded variation with respect to  $y$  for almost all the values of  $x$ : if for a fixed interval  $[a, b]$ ,  $V(x)$  denotes the variation of one of those derivatives on  $[a, b]$ , then  $V(x)$  is a summable function.

Saks (Warszawa).

## Analysis.

Goląb, St.: Sur une définition axiomatique des nombres conjugués pour les nombres complexes ordinaires. Opuscula Math. 1, 1—11 (1937).

Turowicz, A.: Sur une définition axiomatique des nombres conjugués. Opuscula Math. 1, 13—16 (1937).

The first of these two papers contains three sets of conditions in order that a function  $f(z)$  of a complex variable coincide with  $\bar{z}$ , where  $\bar{z}$  denotes the conjugate of  $z$ ; e.g.: If (a)  $f(z_1) = z_1$ ,  $f(z_2) = z_2$  for two real positive integers  $z_1$  and  $z_2$ , relatively prime, (b)  $f(z)$  is completely differentiable at the point 1, (c)  $f(z') \neq f(z'')$  whenever  $z' \neq z''$ , and (d)  $f(z'z'') = f(z') \cdot f(z'')$  for all  $z', z''$ , then identically either  $f(z) = z$ , or  $f(z) = \bar{z}$ . — In the second paper, Turowicz shows that the conditions (a) and (b) of the above statement may be replaced by the following ones: (a')  $f(z)$  is real for real values of  $z$ , and  $f(2) = 2$ , (b')  $f(z)$  is continuous at the point 1. The proof of Turowicz is simple and may be read independently of the paper by Goląb.

Saks.

Wall, H. S.: On the  $n$ -th derivative of  $f(x)$ . Bull. Amer. Math. Soc. 44, 395—398 (1938).

Ist  $y'/y = y_1$  die logarithmische Ableitung einer Funktion  $y$ , und sind  $y_2 = y'_1$ ,  $y_3 = y''_1$ , ... ihre Ableitungen, so gilt:  $y' = y y_1$ ,  $y'' = y(y_2 + y_1^2)$ ,  $y''' = y(y_3 + 3y_1 y_2 + y_1^3)$ ,  $y'''' = y(y_4 + 4y_1 y_3 + 3y_2^2 + 6y_1^2 y_2 + y_1^4)$ , ... Der Koeffizient bei  $y_1^1 y_2^2 \dots y_n^n$  in der Formel für  $y^{(n)}$  ( $\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + n\nu_n = n$ ) bedeutet kombinatorisch die Anzahl der Möglichkeiten,  $n$  Gegenstände so zu verteilen, daß  $\nu_1$  Fächer je einen,  $\nu_2$  Fächer je zwei, ..., endlich  $\nu_n$  Fächer je  $n$  von ihnen enthalten.

L. Schrutka.

Cioranescu, Nicolas: Une généralisation de la première formule de la moyenne et les polynômes de Tchebichef. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1782—1784 (1938).

$f(x)$  étant une fonction qui admet des dérivées d'ordre  $n$  dans l'intervalle  $(a, b)$ , et  $p(x)$  une fonction positive dans le même intervalle, l'A. indique la formule:

$$\int_a^b p(x) P_n(x) f(x) dx = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} \int_a^b \dots \int_a^b V_{n+1}^2 p(x_0) \dots p(x_n) dx_0 dx_1 \dots dx_n$$

où  $P_n(x)$  est le polynôme de Tchebichef de degré  $n$  relatif au poids  $p(x)$ , et où  $V_n$  est le déterminant de Vandermonde  $\|1 x_k \dots x_k^{n-1}\|$ .

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Love, E. R., and L. C. Young: On fractional integration by parts. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 1—35 (1938).

Let  $(a, b)$  be a finite interval,  $f \in L(a, b)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $f_\alpha^+(x) \equiv f_\alpha^+(a, x) = (\Gamma(\alpha))^{-1} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt$ ,  $f_\alpha^-(x) \equiv f_\alpha^-(x, b) = (\Gamma(\alpha))^{-1} \int_x^b f(t) (t-x)^{\alpha-1} dt$ . As a consequence of results of Hardy and Littlewood the authors prove that if  $p > 1$ ,



$q > 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $1/p + 1/q - 1 \leq \alpha$ ,  $f \in L^p$ ,  $g \in L^q$ , then  $\int_a^b f^\pm g dx = \int_a^b f g^\pm dx$ . Let  $W_p$  be the class of functions of bounded  $p$ -variation,  $W_{p+0} = \bigcap_{q>p} W_q$ ,  $p \geq 1$ ,  $W_{p-0} = \sum_{q<p} W_q$ ,  $p > 1$ . Using various results of their own, in particular those concerning linear functionals on  $W_q$ , the authors prove further that if  $p > 1$ ,  $q > 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 - 1/p - 1/q < \alpha$ ,  $f \in W_p$ ,  $g \in W_q$  then  $\int_a^b f dg^- + \int_a^b g df^+ = 0$ . It is also shown that either of the sets of conditions  $(1/q < \alpha = 1/p < 1, g \in L^q)$ ,  $(1/q < 1/p = 1/q + \alpha \leq 1, g \in W_q)$  implies  $g^\pm \in W_{p+0}$ . Finally it is shown that analogous results exist for fractional integrals of Weyl's type, and also in the case where the Stieltjes integrals are taken in a generalized sense defined by means of "binary derivation" (this Zbl. 17, 250).

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Kovanko, A. S.:** Sur l'intégrale de Stieltjes d'une fonction à deux variables avec deux fonctions adjointes. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 4, 61—63 (1938).

The ordinary Stieltjes integral  $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$  for functions of one variable is defined as the limit of the sum  $\sum f(x_i) \Delta \alpha_i$ . When the function  $\alpha(x)$  is continuous and properly increasing, it establishes a 1 — 1 bicontinuous correspondence between the interval  $(a, b)$  of the  $x$ -axis and an interval of the  $\alpha$ -axis. The factor  $\Delta \alpha_i$  is then the measure of the interval which is the transform of the interval  $\Delta x_i$ . This paper considers the analogous notion for functions of two variables. Let  $\xi = \Phi(x, y)$ ,  $\eta = \Psi(x, y)$  establish a 1 — 1 bicontinuous correspondence between regions of the  $(x, y)$  and  $(\xi, \eta)$  planes and let  $[\Phi, \Psi]_\Omega$  denote the measure of the  $\xi, \eta$ -image of the domain  $\Omega$  of the  $x, y$ -plane. Then the Stieltjes integral  $\iint_\Omega f(x, y) D[\Phi, \Psi]$  is defined as the limit of  $\sum f(x_k, y_k) [\Phi, \Psi]_{\Omega_k}$  as the maximum diameter of a subdomain  $\Omega_k$  of  $\Omega$  approaches zero. The class of allowable pairs  $\Phi, \Psi$  is enlarged by various devices (not all of which are clearly explained), and various properties of the integral are listed, in particular its linearity in each of its three arguments. No proofs are given. *Graves* (Chicago).

**Golab, St.:** Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte. Wiadom. mat. 45, 97—137 (1938).

Es handelt sich um die Funktionalgleichung  $f[f(x, y), z] = f(x, yz)$ . Unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über  $f$  wird die (nicht einfache) Diskussion sämtlicher Lösungen durchgeführt.

*Rogosinski* (Cambridge).

**Toucheard, J.:** Sur quelques équations aux itérées. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I, 58, 143—152 (1938).

Es handelt sich um Funktionalgleichungen der Form  $\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_2(x)} = m \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} + p \frac{\vartheta(x)}{x} + r$ , wo  $m, p$  und  $r$  Konstanten sind und  $\vartheta_2(x)$ ,  $\vartheta_3(x)$  die zweite bzw. dritte Iterierte der gesuchten Funktion  $\vartheta(x)$  bedeuten. Durch den Ansatz  $\vartheta(x) = xh(x)$ ,  $\varphi(x) = h\vartheta h_{-1}(x)$  erhält man die einfachere Relation  $\varphi_2(x) = m\varphi(x) + px + r$ . Hat man diese Funktionalgleichung gelöst, so ist  $h(x)$  aus  $h_{-1}\varphi(x) = x \cdot h_{-1}(x)$  zu bestimmen. Die Funktionalgleichung für  $\varphi(x)$  führt in bekannter Weise auf eine einfache Differenzengleichung. Verf. gibt eine allgemeine Methode,  $h(x)$  zu bestimmen. Eine Reihe spezieller Fälle, die auf bekannte Funktionen führen, werden ausgeführt. *Rogosinski*.

**Romanovsky, V.:** Sur une méthode nouvelle de la résolution des équations linéaires aux différences finies avec deux variables indépendantes. Rec. math. Moscou 3, 143—165 u. franz. Zusammenfassung 165 (1938) [Russisch].

The author considers the difference equation  $z_{mn} = a_n z_{m-1, n} + b_n z_{m-1, n-1}$  with the prescribed initial values  $\dots z_{0, -2}, z_{0, -1}, z_{0, 0}, z_{0, 1}, \dots$ ; here  $n$  may be any integer,



positive or negative,  $m$  any positive integer. He introduces the square matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 \\ b_n & a_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & b_{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_\nu \end{pmatrix}$$

when  $\nu$  is any integer  $\leq n - m$  and the elements of which are numbered in order  $n, n - 1, \dots, \nu$ . On putting  $A^m = (a_{ih}^{(m)})$ ;  $i, h = n, n - 1, \dots, \nu$ , the author shows that the solution is given by the formula  $z_{qn} = z_{0n} a_{nn}^{(m)} + z_{0, n-1} a_{n-1, n}^{(m)} + \dots + z_{0, n-m} a_{n-m, n}^{(m)}$ . The coefficients  $a_{ih}^{(m)}$  can be easily calculated explicitly. The same idea can be applied in solving more general equation

$$z_{mn} = \sum_{i=1}^p (\alpha_{0n}^{(i)} z_{m-i, n} + \alpha_{1n}^{(i)} z_{m-i, n-1} + \dots + \alpha_{ki, n}^{(i)} z_{m-i, n-k_i})$$

with prescribed values for  $z_{mn}$ ,  $m = 0, 1, \dots, p - 1$ . Examples taken from the theory of probabilities are discussed.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Pitt, H. R.:** On an inequality of Hardy and Littlewood. *J. London Math. Soc.* **13**, 95—101 (1938).

Let  $a, b, c$  be real,  $p, q, r$  not less than one,  $p', q', r'$  their conjugates ( $1/p + 1/p' = 1, \dots$ ),  $f(x), g(x), h(x)$  measurable and  $\geq 0$  in  $(0, \infty)$ ,

$$F^p = \int_0^\infty f^p dx, \quad G^q = \int_0^\infty g^q dx, \quad H^{r'} = \int_0^\infty h^{r'} dx,$$

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x) g(y) h(x+y) x^{-a} y^{-b} (x+y)^{-c} dx dy,$$

$$u(x) = x^{-c} \int_0^x f(y) g(x-y) y^{-a} (x-y)^{-b} dy, \quad U^r = \int_0^\infty u^r dx,$$

with the usual agreement concerning infinite values of  $p, q, r$ . It is proved that if  $\lambda = 2 - 1/p - 1/q - 1/r' = a + b + c$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  then inequalities hold

$$(*) \quad U \leq KFG, \quad (**) \quad I \leq KFGH, \quad K \equiv K(p, q, r, a, b),$$

provided one of the following sets of conditions is satisfied

- (1)  $\min(p, q, r') < 1, \quad \max(ap', bq') < 1, \quad \max(a, b) \leq \lambda;$
- (2)  $\min(p, q, r') = 1, \quad \max(ap', bq') < 1, \quad \max(a, b) < \lambda, \lambda < 0;$
- (3)  $\min(p, q, r') = 1, \quad \max(a, b) \leq \lambda = 0.$

If  $u(x)$  is defined by  $u(x) = x^{-c} \int_{-\infty}^x f(y) g(x-y) |y|^{-a} |x-y|^{-b} dx dy$  and the range

in other integrals is  $(-\infty, \infty)$  instead of  $(0, \infty)$ , with  $|x|, |y|, \dots$  replacing  $x, y, \dots$  then  $(*)$ ,  $(**)$  hold provided one of the following sets of conditions is satisfied

- (1')  $\min(p, q, r') > 1, \quad \max(ap', bq', cr) < 1, \quad \max(a, b, c) \leq \lambda;$
- (2')  $\min(p, q, r') = 1, \quad \max(ap', bq', cr) < 1, \quad \max(a, b, c) < \lambda, \lambda > 0;$
- (3')  $\min(p, q, r') = 1, \quad a = b = c = \lambda = 0.$

Analogous results for series have been established by Hardy and Littlewood.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Pitt, H. R.:** A remark on Wiener's general Tauberian theorem. *Duke math. J.* **4**, 437—440 (1938).

N. Wiener hat (dies. Zbl. **4**, 59) den für die Sätze Tauberscher Art grundlegenden Satz gegeben, den man wie folgt formulieren kann: a) Sei  $k(x)$   $L$ -integrabel in  $(-\infty, \infty)$ , aus

(I)  $|s(x)| < C$  und (II)  $\int_{-\infty}^\infty k(x-t) s(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^\infty k(t) dt, (x \rightarrow \infty)$ , folgt (III)  $\int_x^{x+h} s(t) dt \rightarrow hA$ ,



$(x \rightarrow \infty)$ , falls  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} k(t) dt \neq 0$  für  $-\infty < x < \infty$  ist. — b) Umgekehrt aber folgt (II) aus (I) und (III) für jede  $L$ -integrable Funktion  $k(x)$ . — Verf. zeigt, daß in diesem Satze die Voraussetzung (I) durch  $s(x) > -C$  ersetzt werden kann, wenn im Teil a)  $k(x) \geq 0$  ist und im Teil b)  $k(x)$  fast überall stetig ist und  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{b\bar{d}}_{n \leq x \leq n+1} |k(x)| < \infty$  bleibt.

Karamata (Beograd).

**Dieulefait, C. E.:** Die Momente einer Gruppe von Funktionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Beziehung zu den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, zu den Laplaceschen Gleichungen, den algebraischen Kettenbrüchen und der Summierung divergenter Reihen. An. Soc. Ci. Argent. 125, 81—111 (1938) [Spanisch].

Nach Durchführung eines Beweises für gewisse Ungleichungen in Determinantenform, die für die Momente von Verteilungen gelten, wird ein weitergehender Satz unter Benutzung Tschebyscheffscher Gedankengänge bewiesen. Anschließend werden Fragen, die mit der Erweiterung der Theorie der Pearsonschen Verteilungsfunktionen durch Anwendungen von Entwicklungen nach Orthogonalfunktionen zusammenhängen, untersucht; insbesondere wird ein einfacher Weg des Überganges zu der Jacobischen Differentialgleichung der dabei auftretenden Polynome gegeben. Neue Gesichtspunkte für die Behandlung einer Reihe hierher gehörender Fragen eröffnet die Heranziehung der Cauchyschen Integralfornel und die Deutung der auftretenden Integrale als Lösungen von gewissen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Bemerkungen über die Zusammenhänge zwischen der Laplaceschen Transformierten mit der Theorie der Cesàroschen und Borelschen Summationsverfahren für divergente Reihen schließen die Untersuchung.

F. Knoll (Wien).

### Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

**Feldheim, Ervin:** Quelques recherches sur l'interpolation de Lagrange et d'Hermite par la méthode du développement des fonctions fondamentales. Math. Z. 44, 55—84 (1938).

Soit  $U_n(f, x)$  le polynome d'ordre  $n - 1$  admettant dans les points  $x_i = \cos \frac{\pi i}{n+1}$  les mêmes valeurs que la fonction  $f(x)$ . L'auteur démontre qu'il existe une fonction  $f(x)$  continue telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} (f(x) - U_n(f, x))^2 dx = \infty.$$

Marcinkiewicz (Wilno).

**Baier, O.:** Ein Approximationsproblem. Math. Z. 44, 293—305 (1938).

Die Herstellung möglichst guter elektrischer Siebketten hat W. Cauer [Math. Z. 38, 1—44 (1934); dies. Zbl. 8, 19] auf ein Approximationsproblem von folgender Art geführt: Eine gebrochen rationale Funktion von  $x$  bestimmter Gestalt ist so zu wählen, daß ihr Produkt mit  $\sqrt{x^2 - 1}$  in einem gegebenen Intervall möglichst wenig von 1 abweicht. Die von Cauer angegebene Lösung wird hier auf einem anderen Wege wiedergefunden. Die Grundlage der Darstellung bildet ein Satz von Abel über elliptische Integrale.

Theodor Zech (Darmstadt).

**Achyeser, N.:** Über die beste Annäherung analytischer Funktionen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 241—244 (1938).

Soit  $f(z)$  une fonction analytique, régulière dans une ellipse de foyers les points  $\pm 1$  admettant  $\frac{1}{q}$  pour demi-somme des axes, telle que:  $-1 < R[f(z)] < 1$  et réelle sur l'axe réel. Soit  $E_{n-1}(f)$  la meilleure approximation de  $f(x)$  dans:  $(-1 \leq x \leq +1)$  par un polynome de degré  $< n$ , l'auteur montre que:

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \frac{q^{n(2m+1)}}{1+q^{2n(2m+1)}}$$



et cette inégalité est la meilleure possible pour les fonctions de cette classe. C'est la première fois qu'une constante universelle, relative à l'approximation par polynômes ordinaires, se trouve déterminée par les méthodes nouvelles et pour une classe naturelle et importante de fonctions. La note se termine par des remarques sur l'approximation de la température dans le refroidissement de l'armille et pose ainsi de nouveaux problèmes sur les meilleurs procédés d'approximation. *J. Favard.*

**Krein, M.:** Sur quelques points de la théorie de la meilleure approximation des fonctions périodiques. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 245—249 (1938).*

Soit  $f(\varphi)$  une fonction de période  $2\pi$  admettant  $p$  dérivées telles que:

$$|f^{(p)}(\varphi) + A_1 f^{(p-1)}(\varphi) + \dots + A_p f(\varphi)| \leq 1$$

où les  $A$  désignent des constantes réelles. En posant:

$$P(D) = D^p + A_1 D^{p-1} + \dots + A_p$$

et en désignant par  $E_{n-1}(f)$  la meilleure approximation de  $f$  par des polynômes trigonométriques de degré  $< n$ , il existe un nombre  $N$  tel que pour  $n > N$ , on ait:

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{2}{\pi} \max \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2k+1)n\varphi}}{(2k+1)P[(2k+1)n]} \right|$$

et cette inégalité est la meilleure possible. Un résultat analogue est obtenu pour la fonction conjuguée. Les méthodes récentes sont ici vues et développées sous un angle original et intéressant. *J. Favard (Grenoble).*

**Krein, M.:** Sur la meilleure approximation des fonctions continues dérivables sur tout l'axe réel. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 619—623 (1938).*

Soit:  $P(D) = A_0 D^m + A_1 D^{m+1} + \dots + A_m$ , un polynôme réel sans racine à partie réelle nulle et  $f(x)$  une fonction bornée ( $-\infty < x < +\infty$ ) possédant  $m$  dérivées telles que:

$$|P(D)f(x)| \leq 1 \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right)$$

posons:

$$C_N = \frac{2}{\pi} \max \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(2k+1)N\varphi}}{(2k+1)P[(2k+1)N]} \right|$$

alors il existe, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une fonction entière  $\varphi(z)$  satisfaisant à:

$$|\varphi(z)| \leq M e^{\sigma|z|} \quad (M > 0, \sigma < N)$$

et telle que:

$$|f(x) - \varphi(x)| < C_N + \varepsilon.$$

La constante  $C_N$  est exacte et le théorème peut être étendu au cas d'un polynôme  $P(D)$  ayant des racines nulles ou purement imaginaires. Des résultats analogues sont démontrés pour les fonctions presque périod. ou à spectre borné. *J. Favard.*

**Marcinkiewicz, J.:** Quelques théorèmes sur les séries orthogonales. *Ann. Soc. Polon. math. 16, 84—96 (1938).*

In the first part of the paper the author proves for the system of Haar orthogonal functions various results established by Paley for Walsh functions. In the second part the author considers a general orthonormal set  $\{\varphi_n(x)\}$  [over  $(0, 1)$ ] and

proves the following results: (1) If  $\limsup_n \int_0^1 |\varphi_n| dx > 0$ , it is possible to select a sub-

sequence  $\{\varphi_{n_\mu}\}$  such that the condition  $\liminf_n S_n(x) > -\infty$  for almost all  $x$ ,

$S_n(x) = \sum_1^n a_\nu \varphi_{n_\nu}(x)$ , implies  $\sum_1^\infty a_\nu^2 < \infty$ . (2) If  $\{\varphi_n\}$  is orthonormal and complete

on  $(0, 1)$  then there exists a non-nul sequence  $\{a_n\}$  and a subsequence  $\{\varphi_{n_\nu}\}$  such

that  $S_{n_\nu}(x) \equiv \sum_1^{n_\nu} a_\mu \varphi_\mu(x)$  converges to zero almost everywhere. (3) If, in addition

to the assumptions of (2), the sequence  $\{\varphi_n\}$  is uniformly bounded, then the sequence  $\{a_n\}$  above can be chosen so that  $a_n \rightarrow 0$ . *J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

**Sakurai, Tokio:** On the termwise differentiated Jacobi series. *Tôhoku Math. J.* 44, 324—340 (1938).

L'auteur prouve le théorème suivant: si le développement de  $f(x)$  dans l'intervalle  $(-1, +1)$  en série de Jacobi converge en moyenne vers  $f(x)$  ce développement dérivé terme à terme  $n$  fois converge en moyenne vers la  $n$ -ième dérivée de  $f(x)$  pourvu que cette dernière appartienne à la classe  $L_1$ . *E. Kogbetliantz* (Paris).

**Takenaka, Satoru:** On the closure of  $\{x^n\}$  on  $(-\infty, \infty)$ . *Tôhoku Math. J.* 44, 351—355 (1938).

The author proves a result analogous to that previously proved by Izumi and wata (this Zbl. 17, 312) the distinction consisting in the requirement that  $f(x)$  be continuous instead of  $f \in L_q$ , and that  $f$  itself should satisfy the condition  $|f(t)| < Ae^{-\rho(|t|)}$ , instead of the Fourier transform of  $f$ . *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

## **Reihen:**

**Moritz, R. E.:** On the extended form of Cauchy's condensation test for the convergence of infinite series. *Bull. Amer. Math. Soc.* 44, 441—442 (1938).

Eine einfache Beweisanordnung mittels des Integralkriteriums für den folgenden Cauchyschen Satz: Wenn  $f(x)$ , definiert für  $x > 0$ , mit wachsendem  $x$  monoton gegen 0 abnimmt, dann sind für  $a > 1$  die Reihen  $\sum f(n)$  und  $\sum a^n f(a^n)$  gleichzeitig konvergent oder divergent. *Rogosinski* (Cambridge).

**Simonart, Fernand:** Sur une classe remarquable de séries potentielles. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I*, 58, 115—123 (1938).

Es werden Potenzreihen betrachtet, deren Koeffizienten eine unendliche Folge linearer Relationen erfüllen. Die Summe einer solchen Reihe genügt einer leicht zu bildenden linearen Differentialgleichung. *F. Lösch* (Berlin-Adlershof).

**Fejes, Ladislás:** Sur les séries exponentielles de Cauchy. *Mat. fiz. Lap.* 45, 115—131 u. franz. Zusammenfassung 132 (1938) [Ungarisch].

Cauchy hat mit Hilfe der Residuenmethode gewisse Verallgemeinerungen der Fourierschen Reihe untersucht, und Picard hat einen Konvergenzsatz für solche Entwicklungen bewiesen. Hier wird unter allgemeineren Voraussetzungen die Äquikonvergenz der Cauchyschen und der Fourierschen Entwicklung einer Funktion  $f(x)$  bewiesen. *Otto Szász* (Cincinnati, Ohio).

**Szász, Otto:** The jump of a function determined by its Fourier coefficients. *Duke math. J.* 4, 401—407 (1938).

Completing the well-known results of Fejér [*J. reine angew. Math.* 142, 165—188 (1913)] and Lukács [ibid. 150, 107—112 (1920)] concerning the determination of the jumps of a function by means of its Fourier coefficients, the author shows that, at every point  $x$  where the limits  $f(x \pm 0)$  exist,

$$\bar{\sigma}_n(x) - \bar{\sigma}_{2n}(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \log 2 \cdot \{f(x+0) - f(x-0)\},$$

$\bar{\sigma}_n(x)$  denoting the first arithmetic means of the series conjugate to the Fourier series of  $f(x)$ . Extensions to the case of a more general definition of a jump. *A. Zygmund*.

**Young, L. C.:** General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series. *Math. Ann.* 115, 581—612 (1938).

Let  $\Phi(u)$ ,  $\Psi(u)$  be continuous and strictly increasing from 0 to  $\infty$  as  $u \uparrow$  from 0 to  $\infty$ ; let  $\varphi(u)$ ,  $\psi(u)$  be the inverse functions of  $\Phi$  and  $\Psi$ ; let  $\lambda(u)$ ,  $\mu(u)$ ,  $\omega(u)$ ,  $\chi(u)$  be monotonic increasing. A function  $f(x)$  is said to be of bounded  $\Phi$ -variation on  $[x', x'']$  if  $\sum_{k=1}^N \Phi(|f(x_k) - f(x_{k-1})|)$  is uniformly bounded for all partitions  $x' = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = x''$ .

Using this notion the author extends the results of his previous paper (this Zbl. 16, 104) from the case where  $f$  and  $g$  are of bounded  $p$ - and  $q$ -variation in sense of Wiener, to the case where they are of bounded  $\Phi$ - and  $\Psi$ -variation respectively. The results thus obtained appear to be not only more general but also simpler to prove. The



following inequality is fundamental for the author's discussion. Let  $[\alpha_r, \beta_r]$ ,  $r = 1, 2, \dots, N$ , be a finite system of intervals on which  $f(x)$  is a step-function, the limits  $g(x \pm 0)$  exist everywhere, and  $|\Delta f| \leq \lambda(\Delta\omega)$ ,  $|\Delta g| \leq \mu(\Delta\chi)$ . Then if  $\alpha_r \leq \gamma_r \leq \beta_r$ ,  $\sum_r [\omega(\beta_r) - \omega(\alpha_r)] = A$ ,  $\sum_r [\chi(\beta_r) - \chi(\alpha_r)] = B$ , we have

$$\sum_{r=1}^N \left| \int_{\alpha_r}^{\beta_r} [f(x) - f(\gamma_r)] dg(x) \right| \leq K \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A/n) \mu(B/n).$$

Here  $K$  is an absolute constant and the integral is a generalized Stieltjes integral, analogous to that of Moore-Pollard. It follows that if  $f$  and  $g$  are of bounded  $\Phi$ - and

$\Psi$ -variation respectively and if  $\sum_n \varphi(1/n) \psi(1/n) < \infty$  then  $\int_{x'}^{x''} f(x) dg(x)$  exists and

$$\left| \int_{x'}^{x''} [f(x) - f(\xi)] dg(x) \right| \leq K \sum_n \varphi(A_0/n) \varphi(B_0/n)$$

when  $A_0$  and  $B_0$  are the total  $\Phi$ - and  $\Psi$ -variations of  $f$  and  $g$ , and  $\xi$  any number such that  $x' \leq \xi \leq x''$ . The author obtains new conditions for term-wise integration, analogous to those of the paper cited above, and applies them to the problem of convergence of Fourier series. As a corollary he shows that if  $f$  is of bounded  $\Phi$ -variation where  $\Phi(u) = \exp(-u^{-\alpha})$  as  $u \rightarrow 0$ , then the Fourier series of  $f$  converges to  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$  provided  $\alpha < \frac{1}{2}$ . Some of the results are extended also to the case of multiple integrals.

*J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

**Young, L. C.: A convergence criterion for Fourier series.** *Quart. J. Math., Oxford Ser. 9*, 115—120 (1938).

Let  $f(x)$  be periodic (of period  $2\pi$ ) and  $\in L(0, 2\pi)$ . Let

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - 2s].$$

We say  $f \in Y_p$  if  $\varphi(t) = O(1)$  and  $V_p(\varphi; t, 2t) = O(1)$  for  $t$  sufficiently small, and  $f \in Y_p^*$  if these conditions are satisfied for all  $t$  in  $[0, \pi]$ . Here  $V_p(f; a, b)$  denotes the  $p$ -th power total variation of  $f$  in  $[a, b]$ . In extending W. H. Young's criterion for convergence of Fourier series and its refinements by Hardy and Littlewood the author proves the following result. If  $f \in Y_p$ ,  $p > 1$ , then the Fourier series of  $f$  is convergent whenever it is summable by any Cesàro means; a necessary and sufficient

condition for convergence to the sum  $s$  is that  $\int_0^t \varphi(u) du = o(t)$ . If, in addition,  $f \in Y_p^*$

then the series is summable  $(C, -1/p + \delta)$  for every  $\delta > 0$ , whenever it is summable by any Cesàro means. It is further shown that if  $\varphi(t) = o(1)$  then it is sufficient for convergence that  $V_\Phi(\varphi; t, 2t) = O(1)$ , where  $\Phi(u) = \exp(-u^{-c})$ ,  $0 < c < 1/2$  and  $V_\Phi$  is the total  $\Phi$ -variation which has been discussed in a recent paper by the author (see the prec. rev.).

*J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

**Zygmund, A.: On the convergence and summability of power series on the circle of convergence. I.** *Fundam. Math.* **30**, 170—196 (1938).

The Fourier series of functions  $f$ , belonging to  $L^r$ , where  $r > 1$ , possess certain important properties, which for  $r = 1$  do no longer hold. The author shows that similar properties hold even for power series of the class  $H$ , that is for such Fourier series, whose conjugate series are also Fourier series. For the sake of brevity we cite

only the following theorem: If  $F(z) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$  is of the class  $H$ , and  $F(e^{i\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} F(\rho e^{i\theta})$ , then for almost every  $\theta$  the sequence  $1, 2, 3, \dots$  can be broken up into two complementary subsequences  $\{\nu_k\}$  and  $\{\mu_k\}$  such that the series  $\sum 1/\mu_k$  converges and that  $S_{\nu_k}(e^{i\theta})$  tends to  $F(e^{i\theta})$ . Here  $S_n(z) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{\nu=1}^n c_\nu z^\nu$ . *Otto Szász.*



**Zygmund, A.: Proof of a theorem of Paley.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 34, 125—133 (1938).

Paley's theorem in question says that if  $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$  then for almost every  $x$  the sequence  $1, 2, 3, \dots$  can be broken up into two complementary sequences  $\{m_k\}$  and  $\{n_k\}$ , depending in general upon  $x$ , such that (1)  $s_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ , (2)  $\sum 1/m_k < \infty$ . Here  $s_n(x)$  and (see below!)  $\sigma_n(x)$  are the  $n$ -th partial sums and the  $n$ -th arithmetic means of the first order of the Fourier series of  $f(x)$ . Paley seems to have shown that the theorem is also true for  $f(x) \in L_p, p > 1$ , but no proof has been published. Zygmund supplies the missing proof and shows that the theorem is in general false for  $p = 1$ . The main step in the proof is to show that

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} [\sigma_n(x) - s_n(x)]^2 \right|^{p/2} dx \leq H_p^p \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx$$

where  $H_p$  is independent of  $f(x)$ .

*E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Turán, P.: Über die monotone Konvergenz der Cesàro-Mittel bei Fourier- und Potenzreihen.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 34, 134—143 (1938).

In Ergänzung und Erweiterung einiger Sätze von Fejér, Koschmieder, Landau, Rogosinski, Schur und Szegő über das Verhalten der Teilsummen und der  $(C, k)$ -Mittel der Fourier- und Potenzreihen werden einige weitere Sätze angegeben. Z. B.: Satz III. Ist  $f(x)$  für  $0 < x < 2\pi$  von oben konvex, nichtnegativ und  $f(x) \sim 0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$ , und bedeutet  $S_n^{(k)}(x)$  die  $n$ -te  $(C, k)$ -Mittel der Fourierreihe, so ist

$$S_{n+1}^{(k)}(x) \geq S_n^{(k)}(x) \geq S_2^{(k)}(x) = \frac{b_1 \sin x}{k+1}$$

für  $n \geq 2, k \geq 2, 0 < x < \pi$ . — Satz VIII. Für die Potenzreihe  $f(x) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, |z| < 1$ , mit  $|f(z)| \leq 1$  in  $|z| \leq 1$ , existiert ein universeller Kreis  $|z| = a$ , indem die  $(C, 1)$ -Mittel monoton konvergieren, d. h. derart, daß

$$\left| \sum_{v=n}^{\infty} a_v z^v \right| \geq \left| \sum_{v=n+1}^{\infty} a_v z^v \right|$$

*Karamata* (Beograd).

**Hamilton, H. J. and J. D. Hill: On strong summability.** Amer. J. Math. 60, 588—594 (1938).

Es sei  $\|a_{mk}\|$  ( $k, m = 1, 2, \dots$ ) eine komplexe Matrix und  $p$  eine positive Zahl. Eine Zahlenfolge  $(s_k)$  heißt durch die Matrix  $\|a_{mk}\|$  zum Wert  $s$  stark summierbar (von  $p$ -ter Ordnung), wenn für jedes  $m > 0$  die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} |s - s_k|^p = \sigma_m$  konvergiert und  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = 0$  gilt. Das Ziel der Note ist die Beantwortung der beiden

folgenden Fragen (für die sich die Ordnung  $p$  als unwesentlich erweist): I. Unter welchen Bedingungen ist  $\|a_{mk}\|$  stark regulär, d. h. wann folgt aus  $s_k \rightarrow s$  stets die starke Summierbarkeit von  $(s_k)$  zum Wert  $s$ ? Als notwendig und hinreichend erweist sich das Bestehen der beiden Bedingungen (1)  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mk} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),

(2)  $\limsup_m \sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}| < \infty$ . II. Unter welchen Bedingungen folgt aus der starken Summierbarkeit einer Folge zu den Werten  $s$  und  $t$  notwendig  $s = t$ ; wann gilt dies wenigstens für alle beschränkten oder konvergenten Folgen? Eine Matrix, die diese Eigenschaft hat, heißt vom Typus  $U$  bzw. vom Typus  $U$  für beschränkte oder konvergente Folgen. Dazu wird u. a. gezeigt: (a) Eine stark reguläre Matrix  $\|a_{mk}\|$  ist genau dann vom Typus  $U$  für konvergente Folgen, wenn (3)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_k a_{mk} \right| > 0$  ist. (b) Die Bedingungen (1) bis (3) genügen nicht, um zu garantieren, daß die Matrix  $\|a_{mk}\|$  allgemein vom Typus  $U$  ist, und es sind auch zugleich notwendige und hinreichende Bedingungen hierfür nicht bekannt. Hinreichend dafür, daß eine Matrix  $\|a_{mk}\|$  vom



Typus  $U$  ist, ist das Bestehen der folgenden 4 Bedingungen: (1')  $\sum_k a_{mk}$  konvergiert für jedes  $m > 0$ , (2')  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_k a_{mk} \right| > 0$ , (3')  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{mk} = 0$  für  $1 \leq k \leq M$  mit einer passenden Konstanten  $M \geq 0$ , (4') für jedes  $m > 0$  und alle  $k > M$  gilt  $\Phi_m - \gamma \leq \arccos a_{mk} \leq \Phi_m + \gamma$ , wo  $(\Phi_m)$  eine passende Zahlenfolge und  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  eine positive Konstante bedeutet.

F. Lösch (Berlin-Adlershof).

● Moore, Charles N.: *Summable series and convergence factors*. (Amer. math. soc. colloquium publ. Vol. 22.) New York: Amer. math. Soc. 1938. VI, 105 pag.

Dans ce livre sont exposés les théorèmes relatifs aux facteurs de convergence pour les séries simples et multiples. Le problème central — détermination des conditions nécessaires et suffisantes vérifiées par ces facteurs de convergence et assurant l'obtention de la somme d'une série convergente ou sommable par le procédé de Cesàro — est traité d'une manière très générale: à côté des séries simples sont aussi considérées les séries doubles et multiples d'ordre quelconque et le procédé de Cesàro est remplacé par celui de Nörlund. Les résultats ainsi obtenus sont nouveaux et très importants. Les résultats classiques s'en déduisent comme des cas particuliers. La bibliographie est faite bien et elle comprend tous les ouvrages, mémoires et notes relatifs aux questions traitées. Les renvois dans le texte sont nombreux et judicieusement choisis.

E. Kogbetliantz (Paris).

### Spezielle Funktionen:

Howell, W. T.: *A definite integral for Legendre functions*. Philos. Mag., VII. s. 25, 1113—1115 (1938).

Verf. geht von einem bestimmten Integral aus, das er durch Potenzreihenentwicklung berechnet, wobei sich hypergeometrische Funktionen ergeben. Da gewisse hypergeometrische Funktionen mit abgeleiteten Legendreschen Polynomen identisch sind, erhält er hieraus eine bestimmte Integraldarstellung für abgeleitete Legendresche Polynome. Insbesondere erhält er zwei einfache bestimmte Integraldarstellungen für Legendresche Polynome. Eine analoge Entwicklung gilt für Jacobische Polynome, welche ebenfalls durch hypergeometrische Funktionen dargestellt werden können. Verf. gelangt so zu einer neuen bestimmten Integraldarstellung für Jacobische Polynome.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Smith, E. R.: *Zeros of the Legendre polynomials*. Iowa State Coll. J. Sci. 12, 263—274 (1938).

In this article the zeros of the Legendre polynomials  $P_n(x)$  are tabulated to six decimal places for all values of  $n$  from one to forty inclusive. For  $n$  less than 26 the results given were derived by earlier authors (Report of the British Association for the Advancement of Science 1879, 49—57 and E. R. Smith, Amer. Math. Monthly 43; this Zbl. 14, 404), but for  $n$  from 26 to 40 inclusive the approximations were made by means of the following two formulas for the zeros  $\zeta$  of  $P_n(x)$ , — formulas which are derived in the present article.

$$\zeta = \left(1 - \frac{\lambda}{8}\right) \sin \alpha \sqrt{\lambda} - \frac{\alpha \lambda^{3/2}}{8} \cos \alpha \sqrt{\lambda} + \theta, \quad (1)$$

where

$$\lambda = \frac{1}{n(n+1)}, \quad \alpha = k\pi + \frac{1+(-1)^n}{4}\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

and where

$$\theta = \frac{5}{32} \alpha \lambda^{5/2} + \left( \frac{5}{192} \alpha^3 - \frac{31}{128} \alpha \right) \lambda^{1/2} + \dots;$$

$$\zeta = 1 + 2\beta\lambda - 2/3(\beta - \beta^3)\lambda^2 + \frac{1}{45}(11\beta - 18\beta^2 + 4\beta^3)\lambda^3 + \dots \quad (2)$$

where  $\beta$  is a zero of the Bessel Function  $J_0\left(-\sqrt{\frac{2-2x}{\lambda}}\right)$ . The author states that about the first two-thirds of the positive zeros (arranged in the order of increasing

magnitude) of each  $P_n(x)$  were computed by use of the first formula and that those nearer to  $x = 1$  were computed by use of the second formula. *M. Marden.*

**Sen, D. N., and V. Rangachariar:** On the zeros of generalised Jacobi polynomials. *Bull. Calcutta Math. Soc.* **29**, 157—166 (1938).

The present article, a sequel to one by the same authors in *Bull. Amer. Math. Soc.* **42** (this Zbl. **16**, 22), is on the zeros of polynomial solutions  $y_n$  of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{n-n(n-1)\alpha}{\alpha(x-a)(x-b)} y = 0,$$

where  $A < 0$  and  $B < 0$ . Defining  $[x]$  as the largest integer not exceeding  $x$  and defining  $p$  as  $[-A + 1]$  and  $q$  as  $[-B + 1]$ , the authors in their previous article studied the case  $n \geq p + q + 1$ , verifying the results of Fujiwara [*Japanese Journal of Math.* **2**, 1—2 (1925)] and of Lawton [*Bull. Amer. Math. Soc.* **38** (this Zbl. **5**, 13)] that the polynomial  $y_n$  ( $n \geq p + q + 1$ ) has  $n - p - q$  zeros on the interval  $a < x < b$ . Their method was that of counting the gains and losses in the number of variations of sign in the Sturmian sequence of polynomials  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{p+q}$  as  $x$  is allowed to vary from  $a$  to  $b$ . Following a similar method, the authors are able in the present article to determine the number of zeros of  $y_n$  lying within each of the intervals  $x < a$ ,  $a < x < b$  and  $b < x$  for all values of  $n$ . For example, they prove that in the interval  $a < x < b$  the number of zeros of the polynomial  $y_n$  is (assuming  $q < p$ )

$$\frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}, \quad \frac{1 + (-1)^{n-q-1}}{2}, \quad \frac{1 + (-1)^{n-p+q-1}}{2} \quad \text{or} \quad n - p - q$$

according as

$$n \leq q, \quad q + 1 \leq n \leq p, \quad p + 1 \leq n \leq p + q \quad \text{or} \quad p + q + 1 \leq n.$$

*M. Marden (Milwaukee.)*

**Bailey, W. N.:** Some integrals involving Bessel functions. *Quart. J. Math., Oxford* Ser. **9**, 141—147 (1938).

Erst wird gezeigt, daß

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - J_0(z \sin \theta)]^2 \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} - \frac{2}{z^3} \{z \cos z - (1 - z^2) \sin z\} + \\ + \frac{1}{8z^2} J_0(2z) + \frac{1}{4z} J_1(2z) + \left( \frac{1}{4z} - \frac{1}{16z^3} \right) \int_0^{2z} J_0(t) dt.$$

Vom letzten Integrale sind Zahlentafeln berechnet worden (z. B. in Watson, *Bessel Functions*, Cambridge 1922, S. 752). Weiter wird allgemein betrachtet

$$I \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu^2(z \sin \theta) \sin^{2\kappa+1} \theta \cos^{2\mu+1} \theta d\theta; \quad \nu + \kappa + 1 > 0; \quad \mu > -1.$$

Das allgemeine Integral kann in eine verallgemeinerte hypergeometrische Reihe  ${}_4F_3$  entwickelt werden, die für  $\kappa = 0$  oder  $\kappa = \nu$  reduziert wird zu einer elementar summierbaren  ${}_3F_2$ . Das Endergebnis ist

$$z^{\mu+\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu^2(z \sin \theta) \sin^{2\kappa+1} \theta \cos^{2\mu+1} \theta d\theta = \\ = \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\kappa+\frac{1}{2})}{2\pi \Gamma(\mu+\kappa+\frac{3}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n + \nu - \kappa) \Gamma(\mu+\kappa+\frac{3}{2} + n) \Gamma(\mu+2\nu+\frac{3}{2} + n)}{n! \Gamma(2\nu-\kappa+1+n) \Gamma(\mu+\nu+\kappa+2+n)} \times \\ \times (\mu+2\nu+\frac{3}{2} + 2n) J_{\mu+2\nu+\frac{3}{2}+2n}(2z); \quad \text{für } \kappa = 0 \quad \text{und} \quad \kappa = \nu.$$



In analoger Weise wird gezeigt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\nu(z \cos \theta) J_\nu(z \sin \theta) \sin^{2\kappa+1} \theta \cos^{2\mu+1} \theta d\theta = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \kappa + 1 + r\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu + 1 + r\right)}{2r! \Gamma(\nu + r + 1) \Gamma(\nu + \kappa + \mu + 2r + 2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2r} J_{\nu+2r}(z).$$

Endlich zeigt der Verf.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_\lambda(z \sin \theta) J_\nu(Z \cos \theta) \sin^{2\kappa+1} \theta \cos^{2\mu+1} \theta d\theta = \\ = 2^{\kappa+\mu-\frac{\lambda}{2}-\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\kappa + 1 + \frac{\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\mu + 1 + \frac{\nu}{2}\right) \times \\ \times \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2} - \kappa + r\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu + s\right)}{2^{r+s} r! s! \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} - \kappa\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \Gamma(\lambda + r + 1) \Gamma(\nu + s + 1)} \times \\ \times \frac{z^{\lambda+2r} Z^{\nu+2s} J_{\kappa+\mu+1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\nu}{2}+r+s} \{\sqrt{Z^2 + z^2}\}}{(Z^2 + z^2)^{\frac{1}{2}(\kappa+\mu+1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\nu}{2}+r+s)}}.$$

Die letzte Doppelreihe bricht ab, wenn  $\kappa - \frac{\lambda}{2}, \mu - \frac{\nu}{2}$  positive ganze Zahlen oder 0 sind.

S. C. van Veen (Dordrecht).

Gheorghiu, Gh. Th.: Sur des fonctions hypergéométriques confluentes. Bull. sci. École polytechn. Timisoara 8, 17—27 (1938).

This paper is concerned with properties of the functions  $B_n(x, \nu)$  defined by the relation

$$\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\nu-1} e^{-tx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n B_n(x, \nu),$$

the functions being in reality series of the type  ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ , where  $\alpha = \alpha' + \varepsilon n$ ,  $\beta = n + 1$ ,  $\alpha'$  being any parameter,  $n$  a positive integer, and  $\varepsilon$  having the value 0 or 1. Recurrence formulae are derived from the generating function, and certain expansions obtained. It is shown, for example, that if a function  $f(x)$  can be expanded in the form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

in the circle  $|x| < R$ , then

$$f(x) = b_0 B_0(x, \nu) + b_1 B_1(x, \nu) + \dots + b_n B_n(x, \nu) + \dots$$

where

$$b_n = (-1)^n \sum_{p=0}^n \frac{(1, p)}{(1, n-p)} \left(\nu - \frac{1}{2}, n-p\right) a_p,$$

and  $(a, n) = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$ , this expansion certainly being valid in the same circle. Some further expansions are given, and integral representations for the functions  $B_n(x, \nu)$  are obtained.

Bailey (Stockport, Cheshire).

MacRobert, T. M.: A proof by induction of the analytical continuations of certain generalized hypergeometric functions. Philos. Mag., VII. s. 25, 848—851 (1938).

Bekanntlich ist

$$\frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\varrho)} {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} \alpha, \beta \\ \varrho \end{matrix} ; -\frac{1}{z} \right] = \frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\varrho - \alpha)} \Gamma(\alpha) z^\alpha {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} \alpha, \alpha - \varrho + 1 \\ \alpha - \beta + 1 \end{matrix} ; -z \right] \\ + \frac{\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\varrho - \beta)} \Gamma(\beta) z^\beta {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} \beta, \beta - \varrho + 1 \\ \beta - \alpha + 1 \end{matrix} ; -z \right]; \quad |\arg z| < \pi.$$

(Gauß, Werke III S. 220; Whittaker-Watson, Modern Analysis 14. 51.) Der Verf. leitet hieraus durch vollständige Induktion ein schon von Thomae (Math. Ann. 2, 1870, S. 427—444) gefundenes analoges Ergebnis für gewisse verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen ab. S. C. van Veen (Dordrecht, Holl.).

**Erdélyi, A.: Einige Integralformeln für Whittakersche Funktionen.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 41, 481—486 (1938).

Ausgehend von einer vom Referenten (dies. Zbl. 18, 20) bewiesenen Integraldarstellung des Produktes  $W_{k,m}(z)M_{-k,m}(z)$  leitet Verf. erst mit Hilfe der Hankelschen Transformation bzw. mit Hilfe einer Tricomischen Formel (dies. Zbl. 13, 398) die Relationen

$$\int_0^\infty J_{2m}(2\sqrt{xy}) W_{k,m}(2\sqrt{y}) M_{-k,m}(2\sqrt{y}) \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} \frac{(1+\sqrt{1+x})^{2k}}{x^{k+\frac{1}{2}}\sqrt{1+x}} \quad (1)$$

$[x > 0, \Re(m) > -\frac{1}{2}, \Re(k) < \frac{1}{4}]$

bzw.

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^{m-\frac{1}{2}} W_{k,m}(2\sqrt{x}) M_{-k,m}(2\sqrt{x}) dx = \frac{2\Gamma(1+2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)} s^{-2m-1} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{s}(\xi+2)} \xi^{-\frac{1}{2}-k+m} (\xi+2)^{-\frac{1}{2}+k+m} d\xi \quad (2)$$

$$[\Re(s) > 0, \Re(m) > -\frac{1}{2}, \Re(m-k) > -\frac{1}{2}]$$

ab. Es folgen Anwendungen auf Besselsche Funktionen, auf die parabolische Zylinderfunktion  $D_n(z)$  und auf das Laguerresche Polynom  $L_n^{(\alpha)}(z)$ . Aus (2) mit  $k=0$  ergibt sich z. B.

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^m K_m(\sqrt{x}) I_m(\sqrt{x}) dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) s^{-\frac{3}{2}m - \frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}s} W_{-\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$[\Re(s) > 0, \Re(m) > -\frac{1}{2}];$

der Spezialfall mit  $m = \frac{1}{4}$ ,  $k = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4}$  von (1) liefert

$$\int_0^\infty D_\nu(2y^{\frac{1}{2}}) \{D_{-\nu-1}(2y^{\frac{1}{2}}) - D_{-\nu-1}(-2y^{\frac{1}{2}})\} \sin 2\sqrt{xy} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\pi} \cos \frac{1}{2}\nu \pi \frac{(1+\sqrt{1+x})^{\nu+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}}\sqrt{1+x}}$$

$[x > 0, \Re(\nu) < 0]. \quad C. S. Meijer \text{ (Groningen).}]$

**Shastri, N. A.: On Lommel functions.** Philos. Mag., VII. s. 25, 930—950 (1938).

Verf. geht von der Reihendarstellung einer Lommelschen Funktion durch eine unendliche Reihe Besselscher Funktionen erster Art aus. Mit Hilfe der operatorischen Darstellung einer Besselschen Funktion erster Art (Laplacesche Integraldarstellung) gelangt er durch Einsetzen zu einer operatorischen Integraldarstellung mit Lommelschen Funktionen. Durch besondere Wahl einer in dieser Integraldarstellung vorkommenden unbestimmten Funktion erhält Verf. eine Reihe von Formeln, wobei unendliche Integrale über das Produkt Lommelscher Funktionen und Potenzausdrücke berechnet werden. Hierauf berechnet Verf. einige unendliche Integrale über das Produkt einer Lommelschen Funktion und einer trigonometrischen Funktion, sodann über das Produkt einer Lommelschen Funktion und einer Besselschen Funktion, über das Produkt einer Lommelschen Funktion und einer Fresnelschen Funktion, über das Produkt einer Lommelschen Funktion und einer trigonometrischen Funktion dividiert durch eine Potenz, einer Lommelschen Funktion und einer Weberschen Funktion sowie über Produkte Lommelscher Funktionen, Weberscher Funktionen, Exponentialfunktionen und Potenzausdrücken. Endlich über das Produkt zweier Lommelscher Funktionen multipliziert mit einem Potenzausdruck sowie über das Produkt zweier Besselscher Funktionen, einer Exponentialfunktion und einem Potenzausdruck.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).



**Rademacher, Hans, and Herbert S. Zuckerman: On the Fourier coefficients of certain modular forms of positive dimension.** Ann. of Math., II. s. 39, 433—462 (1938).

The authors define a modular form  $F(\tau)$  of real (but not necessarily integral) dimension  $r$  as a function, regular for  $\Im(\tau) > 0$ , which satisfies

$$F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \varepsilon(-i(c\tau + d))^{-r} F(\tau) \quad (1)$$

for any integers  $a, b, c, d$  with  $c > 0$ ,  $ad - bc = 1$ , where

$$|\varepsilon| = 1, \quad \varepsilon = \varepsilon(a, b, c, d),$$

and also

$$F(\tau + 1) = e^{2\pi i \alpha \tau} F(\tau) \quad (0 \leq \alpha < 1). \quad (1')$$

Suppose that  $r > 0$ , and that the expansion  $F(\tau) = e^{2\pi i \alpha \tau} \sum_{m=-\mu}^{\infty} a_m e^{2\pi i m \tau}$  contains only a finite number of terms with negative exponents. The main result of the paper is that the coefficients  $a_m$  ( $m \geq 0$ ) are given in terms of the others by

$$a_m = 2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{-\nu} \sum_{k=1}^{\mu} \frac{1}{k} A_{k,\nu}(m) \left(\frac{\nu-\alpha}{m+\alpha}\right)^{\frac{1}{2}(r+1)} I_{r+1}\left(\frac{4\pi}{k} \sqrt{(\nu-\alpha)(m+\alpha)}\right). \quad (2)$$

Here  $I_{r+1}$  is the Bessel function with pure imaginary argument, and

$$A_{k,\nu}(m) = \sum_{\substack{h=0 \\ (h,k)=1}}^{k-1} \varepsilon\left(h', -\frac{hh'+1}{k}, k, -h\right) e^{-\frac{2\pi i}{k}((\nu-\alpha)h' + (m+\alpha)h)},$$

where  $hh' \equiv -1 \pmod{k}$ . For  $\alpha = 0$  (a case which in fact can only arise when  $r$  is an even integer), (2) is to be modified when  $m = 0$  by the replacement of

$$\left(\frac{\nu-\alpha}{m+\alpha}\right)^{\frac{1}{2}(r+1)} I_{r+1}\left(\frac{4\pi}{k} \sqrt{(\nu-\alpha)(m+\alpha)}\right) \quad \text{by} \quad \frac{(2\pi\nu)^{r+1}}{k^{r+1} \Gamma(r+2)}.$$

The proof of (2) follows the same lines as Rademacher's proof of his expansion for  $p(n)$  (see this Zbl. 16, 246 and 17, 55); namely, application of the Hardy-Littlewood method with Farey fractions of order  $N$  and circle  $|e^{2\pi i \tau}| = e^{-2\pi n N^{-1}}$ , then the application of (1) to the integrand, and finally the operation  $N \rightarrow \infty$ . — It follows incidentally from (2) that if  $F(\tau)$  tends to a finite limit as  $\Im(\tau) \rightarrow \infty$  then  $F(\tau) = 0$  identically. — The authors show that any modular form  $F(\tau)$  is representable as

$$\eta(\tau)^{-2r-12\beta-8\gamma} g_3(1, \tau)^{\beta} g_2(1, \tau)^{\gamma} (C_{\kappa} J(\tau)^{\kappa} + \dots + C_1 J(\tau) + C_0),$$

where  $\beta = 0$  or  $1$ ,  $\gamma = 0, 1$  or  $2$ , and  $\kappa \geq 0$  is an integer. This leads to an evaluation of  $\varepsilon(a, b, c, d)$  and  $A_{k,\nu}(m)$ . — Finally the authors write down the expansion (2) in a number of special cases, where  $a_{-1}, \dots, a_{-\mu}$  are easily calculated. *Davenport.*

**Petersson, Hans: Zur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen. IV: Anwendungen der Formen- und Divisorentheorie.** Math. Ann. 115, 670—709 (1938).

Fortsetzung zu dies. Zbl. 18, 357. a) Aus seiner Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes leitet Verf. Formeln für die algebraische Dimension der Schar  $\mathfrak{S}$  der Formen  $\{\Gamma, -r, \nu\}$ , die Vielfache eines Divisors  $\mathfrak{d}$  sind, ab, wenn gewisse Voraussetzungen über  $\mathfrak{d}$  und  $r$  bestehen. In anderen Fällen können untere Grenzen für die Dimension bestimmt werden, z. B. gibt es mindestens konst.  $\cdot N^3$  linear unabhängige ganze Formen, wenn  $r > 1$ ,  $\Gamma = \Gamma(N)$  die Hauptkongruenzuntergruppe  $N$ -ter Stufe der Modulgruppe und  $|\nu| = 1$  ist. b) Sei  $\Gamma$  von erster Art,  $\mathfrak{S}$  dieselbe Schar wie unter a) und  $\mathfrak{R}$  eine Teilschar von  $\mathfrak{S}$ , so daß es zu jeder Form  $\mathfrak{f}$  aus  $\mathfrak{S}$  genau eine Form  $\varphi$  aus  $\mathfrak{R}$  gibt, deren Entwicklung in den Punkten einer vorgegebenen Punktgruppe  $\mathfrak{G}$  bis zu einer vorgeschriebenen Ordnung  $o$  mit der Entwicklung von  $\mathfrak{f}$  übereinstimmt.  $\mathfrak{R}$  heißt ein reduziertes Repräsentantensystem. Solche gibt Verf. mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes an, wenn  $o = 0$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $\mathfrak{G}$  aus allen Spitzen besteht,  $\mathfrak{S}$  die

Schar aller ganzen Formen ist und  $r > 2$ ,  $|v| = 1$  oder  $r = 2$ ,  $v$  beliebig oder  $r = 1$ ,  $v = \pm 1$  ist. c) Nach einem Satz von Brill-Noether nimmt auf einem algebraischen Gebilde von allgemeinen Moduln und dem Geschlecht  $p$  eine Funktion des Gebildes jeden Wert mindestens  $[(p+3)/2]$ -mal an. Nun wird gezeigt, daß zu den Untergruppen eines  $\Gamma$  von erster Art meist Funktionen von niedrigerer Wertigkeit existieren, daß die Moduln also spezialisiert sind. Beispiele sind die  $\Gamma(N)$  mit  $N \geq 18$ . d) Die Gruppe  $\Gamma(4)$  ist im wesentlichen (dies. Zbl. 18, 63) durch die Forderung charakterisiert, daß es mindestens zwei linear unabhängige Formen  $\{\Gamma, -\frac{1}{2}, v\}$ , aber keine Form  $\{\Gamma, -r, v\}$  mit  $r < 1/2$  geben soll, wenn  $|v| = 1$  und  $v$  unverzweigt ist und daß  $\Gamma$  Normalteiler möglichst großen Indexes einer umfassenden Gruppe  $\Gamma_1$  von erster Art sein soll. Dann ist auch das M.S. eindeutig bestimmt, und die Schar der ganzen Formen hat die beiden Theta-Nullwerte als Basis, die so durch allgemeine Forderungen charakterisiert sind, die einzeln sehr schwach sind. *Lochs (Kennelbach).*

### Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Lijn, G. van der: La propriété de Darboux des fonctions de deux variables. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 341—343 (1938).

Es sei  $f(x, y)$  so beschaffen, daß es durch jeden Punkt des Gebiets  $\mathcal{G}(x, y)$  genau eine Integralkurve der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  gibt und daß die Integralkurve nach beiden Seiten bis zum Rand von  $\mathcal{G}$  fortgesetzt werden kann. Ist  $f(x_1, y_1) = A_1$ ,  $f(x_2, y_2) = A_2$ , so gibt es in jedem Teilgebiet von  $\mathcal{G}$ , das die Punkte  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  enthält, zu jedem zwischen  $A_1$  und  $A_2$  gelegenen Wert  $A_3$  mindestens einen Punkt  $x_3, y_3$ , so daß  $f(x_3, y_3) = A_3$  ist. *Kamke (Tübingen).*

Kniess, Hans: Lösung von Randwertproblemen bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels der endlichen Fourier-Transformation. Math. Z. 44, 266—292 (1938).

Die Arbeit behandelt gewisse Randwertaufgaben, die sich durch reine Sinus- oder reine Kosinusreihen lösen lassen, nach dem Vorbild des von G. Doetsch entwickelten Funktionaltransformationen-Kalküls [vgl. etwa dies. Zbl. 8, 358 und Math. Ann. 112, 52 (1935); dies. Zbl. 13, 159]. Die „endliche Sinus- bzw. Kosinustransformation“ gibt den Übergang von den Funktionen zu den Fourierkoeffizienten der betr. Reihe und stellt unter Umständen aus der Differentialgleichung algebraische Gleichungen für die Koeffizienten her; die Umkehrung der Transformation wird durch die unter geeigneten Bedingungen in gewöhnlichem Sinne oder im Mittel konvergenten Reihen gegeben. Die Methode wird, nachdem einige einfache Beispiele zur Orientierung behandelt sind, für das System von  $n$  Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten  $Y'' = c_{v1}Y_1 + \dots + c_{vn}Y_n + \Phi_v(x)$  mit gegebenen Randwerten bei  $x = 0, l$  durchgeführt. [Vgl. dazu die verwandte, aber von weniger allgemeinen Ansätzen ausgehende Behandlung eines Spezialfalles bei L. Fantappiè, Mem. Accad. Ital. 4, 55 (1933); dies. Zbl. 8, 312]. Schließlich werden eine größere Anzahl von die Anwendung der Methode erleichternden Formeln tabellenartig zusammengestellt. *Hellinger.*

Moisseiev, N.: Sur la stabilité Jacobienne généralisée d'une trajectoire périodique. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 537—541 (1938).

„Soit  $T$  une trajectoire simple-périodique et régulière, à mouvement synodique direct d'un problème dynamique

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2n\dot{y} + U'_x, & \ddot{y} &= -2n\dot{x} + U'_y, \\ n &= \text{const}, & U &= U(x, y),\end{aligned}$$

correspondant à la valeur  $h_T$  de la constante  $h$  de l'intégrale de Jacobi  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(\bar{U} + h)$ .“ Für den Bogen  $T$  wird ein Begriff verallgemeinerter Stabilität und Instabilität eingeführt, und es werden verschiedene Eigenschaften dieses Begriffs mitgeteilt. *Kamke (Tübingen).*



**Drinfeld, G. I.:** Les invariants intégraux d'ordre quelconque les plus généraux. La structure des fonctions contravariantes. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 37—48 u. franz. Zusammenfassung 48 (1936) [Russisch].

**Théodoresco, N.:** Recherches sur les équations aux dérivées partielles, linéaires, d'ordre quelconque. Les solutions élémentaires. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 24, 263—321 (1938).

Die wesentliche Idee dieser Arbeit ist, jeder linearen partiellen Differentialgleichung vom elliptischen oder hyperbolischen Typus eine Geometrie zuzuordnen und sodann die Gleichung in dieser Geometrie in invarianter Weise zu untersuchen. Dies gelingt, indem die Gleichungen der Bicharakteristiken als Hamiltonsche Gleichungen eines Variationsproblems  $\mathcal{L}(dx_1, \dots, dx_n; x_1, \dots, x_n)$  aufgefaßt werden, wobei  $\mathcal{L}$  eine positiv homogene Funktion ersten Grades in den  $dx_i$  ist. Man kann dann  $\mathcal{L}$  als Linienelement einer Finslerschen Geometrie deuten, die dann für die Differentialgleichung eine ähnliche Rolle spielt wie die zugeordnete Riemannsche Maßbestimmung für Gleichungen zweiter Ordnung. Einschränkend wird bloß vorausgesetzt, daß das Variationsproblem regulär ist; im übrigen, daß die Koeffizienten der Gleichung analytisch sind. — Anwendung auf die Konstruktion von Grundlösungen. Mit diesen Hilfsmitteln gelingt die Übertragung des bekannten Hadamardschen Verfahrens. Es wird gezeigt, daß Gleichungen ungerader Ordnung niemals Grundlösungen besitzen, die auf dem charakteristischen Konoid algebraisch singulär werden (Grundlösungen mit logarithmisch-algebraischen Singularitäten sollen in einer demnächst erscheinenden Arbeit konstruiert werden). Bei Gleichungen gerader Ordnung ist die Situation genau dieselbe wie bei Gleichungen zweiter Ordnung. Für Gleichungen vierter Ordnung wird die Konstruktion durchgeführt.

W. Feller (Stockholm).

**Moisil, Gr. C.:** Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires et du type parabolique. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 24, 322—348 (1938).

Verf. untersucht insbesondere die Bicharakteristiken der im Titel genannten Gleichungen. Sie werden als Extremalen eines Variationsproblems dargestellt oder als geodätische Linien einer mit einer Riemannschen Metrik versehenen Mannigfaltigkeit, welche variété totalement caractéristique genannt wird. Diese Überlegungen führen auch zur Untersuchung gewisser weiterer Kurven, die auch noch von den Koeffizienten erster Ordnung der Gleichung abhängen; sie liegen auf der sog. variété principale, die mit der Differentialgleichung in kovarianter Weise verbunden ist. Schließlich findet Verf. Normalformen für gewisse Spezialfälle.

W. Feller (Stockholm).

**John, Fritz:** The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables. Duke math. J. 4, 300—322 (1938).

Es handelt sich um die Gleichung (\*)  $u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3} - u_{x_4 x_4} = 0$ . Durch eine Abbildung des  $R_4$  auf die Geraden des  $R_3$  wird  $u$  als Funktion  $v(l)$  der Geraden  $l$  des  $R_3$  interpretiert. Der von Åsgeirsson [Math. Ann. 113 (1936); dies. Zbl. 15, 18] bewiesene Mittelwertsatz lautet dann: Auf jedem einschaligen Hyperboloid sind die Mittelwerte von  $v(l)$  auf den beiden Scharen von Erzeugenden einander gleich. Verf. nennt jede Linienfunktion dieser Eigenschaft harmonisch: wenn sie zweimal differenzierbar ist, so handelt es sich um eine Lösung von (\*). Ferner heißt  $v(l)$  im Unendlichen regulär, wenn es eine monotone Funktion  $h(\Delta)$  mit endlichem Integral gibt derart, daß  $|v(l)| < h(\Delta)$ , wobei  $\Delta$  den Abstand von  $l$  vom Ursprung bezeichnet. — Wenn  $f(P)$  eine stetige Punktfunktion des  $R_3$  ist, die einer ähnlichen Bedingung im Unendlichen genügt, so bilden die Mittelwerte von  $f$  über die Geraden eine harmonische Linienfunktion. Wenn  $F(\pi)$  eine Ebenenfunktion ist, so gilt dasselbe von den Mittelwerten von  $F$  über sämtliche Tangentialebenen des Zylinders vom Radius  $p$  um die Gerade  $l$  (wobei  $p > 0$  willkürlich ist). Verf. gelingt es umgekehrt, jede im Unendlichen reguläre Linienfunktion in der letztgenannten Art darzustellen und unter gewissen Regularitätsbedingungen auch in der erstgenannten Weise. — Dies gestattet gewisse, jedoch nur spezielle Anfangswertaufgaben für (\*) zu lösen.

W. Feller.

## Potentialtheorie:

**Tulajkov, A.:** Eine Normalitätsbedingung für Familien von Potentialfunktionen. *Fundam. Math.* **31**, 27—28 (1938).

A theorem of Montel [*Fundam. Math.* **25**, 388—407 (1935); this *Zbl.* **12**, 405] on normal families of harmonic functions is completed as follows: In order that a family  $E$  of harmonic functions in an open domain  $D$  should be normal, it is necessary and sufficient that for any bounded, connected, closed set  $D_1 \subset D$  should exist a number  $M > 0$  such that no function belonging to  $E$  admits on  $D_1$  all the values of the interval  $[-M, M]$ . Saks (Warszawa).

**Privalov, I. I.:** Sur le principe de maximum généralisé pour les fonctions subharmoniques. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **19**, 29—31 (1938).

The author proves the following theorem: Let  $u$  be a subharmonic function in a bounded open domain  $D$ , such that (1)  $u(P) \leq M < +\infty$  for  $P \in D$ , (2)  $\limsup_{P \rightarrow Q} u(P) \leq C$  at every point  $Q$  of the boundary of  $D$  with the exception at most of those belonging to a set  $E$  of harmonic measure zero with respect to the domain  $D$ . Then  $u(P) \leq C$  throughout the whole of  $D$ . — In case of a plane domain  $D$  bounded by a rectifiable Jordan curve  $J$  it is shown that the sets in  $J$  which are of harmonic measure zero with respect to  $D$  coincide with those of length zero. This result is generalized to the space for the domains with boundaries satisfying certain conditions of regularity. Saks (Warszawa).

**Savin, S. A.:** Solution of Laplace's harmonic equation with three independent variables. *J. Math. Physics*, Massachusetts Inst. Techn. **16**, 196—201 (1938).

Man transformiert  $\Delta u = 0$  auf neue Veränderliche  $k_0, k$  und  $r$ , wobei die  $k$  ganze lineare homogene Funktionen sind, und  $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ . Bei passender Wahl der 9 freien Konstanten ergibt sich eine Differentialgleichung erster Ordnung. Verf. findet so eine von zwei willkürlichen Funktionen abhängige Lösung von  $\Delta u = 0$ . W. Feller (Stockholm).

**Poritsky, Hillel:** On the boundary condition  $\partial u / \partial n + au = 0$  for harmonic functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 443—448 (1938).

Übertragung der Spiegelungsmethode aus *Bull. Amer. Math. Soc.* **43** (1937) (vgl. dies. *Zbl.* **18**, 26) auf Bereiche, die durch zwei parallele Ebenen oder durch eine Kugel begrenzt werden. W. Feller (Stockholm).

**Grünberg, G.:** On a method of solving the fundamental problem of electrostatics and allied problems. *Ž. eksper. teoret. Fis.* **8**, 221—252 (1938) [Russisch].

Man kann bekanntlich unter geeigneten Voraussetzungen das elektrostatische oder magnetische Feld als ein Newtonsches bzw. logarithmisches Potential von (fiktiven) Belegungen betrachten, die längs der Flächen verteilt sind, wo die dielektrischen bzw. magnetischen Konstanten einen Sprung erleiden. Da man das Benehmen des Potentials bei der Annäherung an die Belegungsflächen kennt, erhält man zur Bestimmung der Belegungen eine bzw. ein System von Integralgleichungen. — In der Arbeit wird diese Methode angewandt, wobei weder ein strenger Beweis gegeben wird, noch die genauen Voraussetzungen für ihre Anwendbarkeit besprochen werden. — Nachdem einige einfache Fälle (Grenzfläche eine Ebene, Kugeloberfläche und unendlicher Kreiszylinder) behandelt werden, wo aus der Symmetrie man sofort die Werte für die Belegung erhält, betrachtet der Verf. den (ebenen) Fall, wo die Grenzlinien der Medien ein System von Strahlen aus einem Punkte bilden. — Ausführlicher wird der Fall von zwei Strahlen, die einen geraden Winkel bilden, besprochen. — In der Arbeit fehlen vollständig Hinweise auf bisherige Untersuchungen über gleiche und eng verwandte Fragen. [Vgl. z. B. die Arbeiten von Stein über das magnetische Feld in einem Transformator, *Z. angew. Math. Mech.* **9** (1929) und seine folgenden Artikel]. Stefan Bergmann.



## Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Erdélyi, A.: Inhomogene Saiten mit parabolischer Dichteverteilung. S.-B. Akad. Wiss. Wien, IIa 146, 589—604 (1937).

„Strenge“ Lösungen des Problems der Ermittlung der Schwingzahlen einer Saite mit nicht gleichmäßiger Massenverteilung sind bekannt für solche Fälle, in denen die Massenbelegung 1. eine lineare Funktion der entlang der Saite gemessenen Koordinate ist oder 2. sich auf ein vollständiges Quadrat reduziert. Der Verf. behandelt nun den allgemeinen Fall einer quadratischen Massenbelegung

$$\rho(\xi) = \kappa + \lambda\xi + j\xi^2. \quad (1)$$

Die Integration der Differentialgleichung kann durch die sog. konfluenten hypergeometrischen Funktionen (auch Whittakersche Funktionen genannt) erfolgen. Die Frequenzgleichungen sind daher transzendente Gleichungen zwischen solchen Funktionen. Zur Herstellung der Frequenzgleichungen sind Fallunterscheidungen nötig, je nachdem ob in (1)

$$j \geq 0 \quad \text{und} \quad 1 + \frac{2\lambda}{j} \geq 0 \quad (2)$$

ist. — Für die Whittakerschen Funktionen werden weiterhin asymptotische Darstellungen angegeben (getrennt für reelle und für imaginäre Werte der Argumente und Parameter). Durch Benutzung dieser asymptotischen Darstellungen gelingt es, Näherungswerte für die Eigenfrequenzen explizit anzugeben. Es zeigt sich, daß diese Näherungen auch schon für den niedrigsten Eigenwert gut brauchbar sind. K. Klotter.

Sekera, Zdeněk: Zur Wellenbewegung in Flüssigkeitsschichten mit vertikal veränderlicher Geschwindigkeit. Astrophys. Norvegica 3, 1—69 (1938).

As basic state for the method of small perturbations a steady horizontal flow of the whole fluid with velocity  $U$  is chosen,  $U$  being generally a function of the vertical co-ordinate  $z$ . The pressure  $P$  in the steady flow is, moreover, connected with the density  $Q$  by the relation  $dP/dz = -gQ$ . — If in the perturbation the pressure  $p$  and streamfunction  $\Phi$  contain the factor  $e^{i(\mu x - \nu t)}$  multiplied by amplitudes depending only on  $z$  the differential equation for the amplitude  $\Phi(z)$  of the stream-function is  $[U - \omega][\Phi''(z) - \mu^2\Phi(z)] = 0$  where  $\omega$  is the velocity of propagation of the wave. The non-singular case in which  $U = \omega$  for no value of  $z$  in the range under consideration is first studied and a general frequently equation is obtained in the form of a determinant of order  $n - 1$  equated to zero the  $m^{\text{th}}$  row consisting of 3 quantities  $D_m, F_m, D_{m+1}$  quadratic in  $\omega$  preceded if possible by  $m - 2$  zeros and followed if possible by zeros, the first and last rows being exceptional in having only two constituent different from zero. For  $n = 1, 2, 3, 4$  the frequency equation gives those derived by G. I. Taylor and B. Haurwitz. For cosech  $(\mu H_m) = 0$  and consequently  $D_m = 0$  the determinant breaks up into factors of the same general type as the determinant itself the vanishing of the first factor being indeed the frequency equation when the  $m^{\text{th}}$  boundary is rigid,  $n$  being simply replaced by  $m$ . Full discussion with the aid of graphs is given for the cases of two and three layers of fluid. A numerical case is worked out for two layers corresponding to average conditions in the air near the earth so as to determine the stability of waves at the boundary of the frictional layer when the increase of wind velocity with altitude is approximated by a linear function. The stability diagram can also be used to find the conditions for the production of stationary air waves for which  $\omega = 0$  and to find whether the root of the frequency equation corresponding to the point  $x, y$  of the diagram represents a singular solution or not. The singular solution, which occurs when  $U(z_0) = \omega$ , is discussed in Ch. 2. If  $(\xi, \zeta)$  are the co-ordinates of a definite fluid particle and small quantities of the first order only are considered it is found the orbit is an ellipse  $b^2(\xi - \xi_0)^2 + a^2(\zeta - \zeta_0)^2 = a^2b^2$  whose semi axes are given by the equations  $\mu U'(z - z_0)a = \Phi'(z)$ ,  $U'(z - z_0)b = \Phi(z)$ . If now  $\Phi(z)$  and  $\Phi'(z)$  take values different from zero near the singularity  $z_0$  then, as  $z \rightarrow z_0$ ,  $a$  and  $b$  increase beyond all limits which is contrary to the assumption of a

small perturbation. To avoid a contradiction it must be assumed that  $\Phi(z)$  and  $\Phi'(z)$  and to zero as  $z \rightarrow z_0$  and that consequently  $\Phi(z)$  must be determined by a differential equation of at least the third order because the dynamical condition at the next boundary requires at least one constant of integration to be still undetermined. To satisfy this requirement viscosity is taken into consideration and with the simplifications  $z_0 = 0$ ,  $U = U_0 + U'z$ ,  $\omega = U_0 + i\beta U'$ , where  $\beta$  is either zero or very small, the differential equation for the significant part  $\Psi(z)$  of the stream-function is

$$\Psi'''(z) - i\mu R U'[(z - i\beta)\Psi'(z) - \Psi(z)] = 0$$

where  $R$  is a Reynolds number. This equation is transformed by the substitution  $3\xi = 2\sqrt{\pm R U' i(z - i\beta)^{\frac{2}{3}}}$ , the upper sign being right for  $U' > 0$ , the lower sign for  $U' < 0$ . The resulting equation

$$9\xi^2\Psi'''(\xi) + 9\xi\Psi''(\xi) - (1 + 9\xi^2)\Psi'(\xi) + 6\xi\Psi(\xi) = 0$$

has two singularities  $(0, \infty)$ ; the first is a point of determinateness the second one is not. Since  $\Psi(\xi) = 9^{\frac{2}{3}}$  is a particular solution a reduction in order is possible and

it is found that  $\Psi(\xi) = \xi^{\frac{2}{3}} \int_{\xi_0}^{\xi} Z_{\frac{2}{3}}(i\eta) d\eta/\eta$  where  $Z_n(x)$  is a Bessel function of order  $n$

whose nature is to be found by the condition that  $\Psi(\xi)$  must be finite as  $\xi \rightarrow \infty$ . The Hankel functions are now used to complete the solution of the problem and some definite integrals containing them introduce special values of the gamma function into the equations. The boundary conditions at the next boundary are then taken into consideration. — The frequency equation of the singular solution is written down and compared with that for the non singular solution, use being made of Sylvester's method of expansion. The paper ends with a discussion of the singular solution in the problem of three layers.

*H. Bateman (Pasadena).*

**Stellmacher, Karl: Ausbreitungsgesetze für charakteristische Singularitäten der Gravitationsgleichungen.** Math. Ann. 115, 740—783 (1938).

This paper is a substantial contribution to the theory of the propagation of gravitational waves, which was begun by the work of Einstein, Weyl, and Eddington in 1916—1923 and further advanced by the investigations of Levi-Civita on the characteristics and bicharacteristics of the equations of general relativity. The author examines those surfaces (wave-fronts) on which the solutions of the field-equations of gravitation and electromagnetism have discontinuous derivatives, and studies the nature of the discontinuities and the laws of their propagation. The discussion is based on Hadamard's theory of characteristics and bicharacteristics, and is invarientive throughout. — Chapter I deals with the theory of characteristics for discontinuities of order greater than the first, and yields results analogous to those of Eddington, especially with regard to the transversal character of that part of the discontinuity-tensor which cannot be transformed away. — In Chapter II it is shown that the bicharacteristics of the field-equations coincide with the geodesic null-curves, and possess the "ray-property", i.e. if a characteristic disturbance is present at one point of a ray, then it persists at every point of the ray. By use of Herglotz's differential equations for the propagation of discontinuities of the differential equations of continua, a conservation-theorem is obtained for the "discontinuity-energy"  $e$ . This seems to be the first occasion on which a true conservation-theorem has been derived invariantly from the field-quantities in general relativity-theory. The author speculates regarding the possibility of relating this discontinuity-energy to quantum-theory, putting  $e = h\nu$ ; it is remarkable that when the coordinate-system is changed, the correct Doppler formula is obtained for  $\nu = e/h$ . This however holds only for the energy of discontinuities of the first order, i.e. discontinuities of the first derivatives of the metrical and electrical potentials. These discontinuities are studied in Chapter III, where it is shown that they possess the ray-properties. An exceptional case arises



when the wave-front of discontinuity is the generalisation to Riemannian metric of a plane wave-front: in this case both the direction of the ray and also the discontinuity-tensor are indeterminate. Whittaker (Edinburgh).

### **Integralgleichungen, Integraltransformationen:**

Busbridge, Ida W.: Dual integral equations. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 115—129 (1938).

A proof of a formal result by Titchmarsh. Let  $h(x)$  be absolutely continuous on  $(0, 1)$ ,  $0 < \alpha < 2$ ,  $-\nu < \alpha - 1/2 < \nu$ . Then the equations

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^{\nu+1} \int_0^\infty J_{\nu+1}(xy) y^{\alpha-2} f(y) dy \right\} = x^{\nu+1} h(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^\nu \int_0^\infty J_\nu(xy) y^{-1} f(y) dy \right\} = 0, \quad x > 1,$$

under suitable conditions, admit one and only one solution

$$f(x) = 2^{1-\alpha/2} x^{1-\alpha} [\Gamma(\alpha/2)]^{-1} \left\{ x^{\alpha/2} J_{\nu+\alpha/2-1}(x) \int_0^1 y^{\nu+1} h(y) (1-y^2)^{\alpha/2-1} dy \right. \\ \left. + \int_0^1 y^{\nu+1} (1-y^2)^{\alpha/2-1} dy \int_0^1 (xu)^{1+\alpha/2} J_{\nu+\alpha/2}(xu) h(u) du \right\}.$$

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Ostrowski, Alexandre: Sur quelques transformations de la série de Liouville-Neumann. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1345—1347 (1938).

Continuation of a previous note (this Zbl. 15, 114) aiming to reduce the number of integrations necessary for computing a finite number of terms of the Liouville-Neumann series:  $\sum_{n=0}^\infty K_n(x, y)$ , with  $K_0(x, y) \equiv 1$ ,  $K_n$  the iterated kernel of  $K(x, y)$  of order  $n$ . Using the symbolical representation  $s_n(z) = 1 + z + \dots + z^{n-1}$ , the reductions depend upon the following algebraic identities:  $s_{3n}(z) = \prod_{m=0}^{n-1} (1 + z^{2^m} + z^{2 \cdot 3^m})$ ,  $s_{nm}(z) = s_n(z) \cdot s_m(z^n) = s_m(z) \cdot s_n(z^m)$  and  $s_7(z) = \left(1 - 2z \cos \frac{2\pi}{7} + z^2\right) \left(1 - 2z \cos \frac{\pi}{7} + z^2\right) \left(1 - 2z \cos \frac{3\pi}{7} + z^2\right)$ . Hildebrandt (Ann Arbor).

Michlin, S.: Le problème d'équivalence dans la théorie des équations intégrales singulières. Rec. math. Moscou 3, 121—140 u. franz. Zusammenfassung 140—141 (1938) [Russisch].

This paper contains a detailed exposition of results sketched in a previous note by the author (this Zbl. 17, 168). J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Roodyj, I.: On some properties of Cauchy's function and their application to the solution of integral equation. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 4, 95—102 u. engl. Zusammenfassung 102—103 (1938) [Ukrainisch].

Reid, William T.: An integro-differential boundary value problem. Amer. J. Math. 60, 257—292 (1938).

Let  $I(\eta) = 2Q[\eta(a), \eta(b)] + \int_a^b 2\omega(x, \eta, \eta') dx + \int_a^b \int_a^b M_{ij}(x, t) \eta_i(x) \eta_j(t) dx dt$

where  $\eta \equiv [\eta_i(x)]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\omega$  and  $Q$  are quadratic forms in the  $2n$  variables  $\eta_i, \eta'_i$  and  $\eta_i(a), \eta_i(b)$  respectively, and the tensor notation for summation is used. The author considers a boundary value problem consisting of the Euler-Lagrange integro-differential equations and transversality conditions for minimizing  $I(\eta)$  under the condition  $K(\eta) \equiv \int_a^b (\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2) dx = 1$  assuming that  $\eta_i$  satisfy a system

of  $m(<n)$  ordinary homogeneous linear differential equations with a system of  $p(\leq 2n)$  linear homogeneous end-conditions. An extensive use is made of the notion of a Green's matrix for an integro-differential system as introduced by Tamarkin [Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 755—800 (1927); **32**, 860—868 (1930)] and Jonah (Unpublished thesis, Brown University, 1930). The author passes on to a discussion of various comparison and oscillation theorems and obtains results which are more general than results by various other writers, who considered only the case where all  $M_{ij} = 0$  and made various restrictive assumptions, such as "normality" condition. Finally the author considers existence, comparison, and oscillation theorems for an integro-differential problem which is non-linear in a parameter and succeeds in obtaining results by introducing an auxiliary characteristic parameter on which the system depends linearly, and by applying the preceding theory, valid in the linear case.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Busbridge, Ida W.:** A theory of general transforms for functions of the class  $L^p(0, \infty)$  ( $1 < p \leq 2$ ). Quart. J. Math., Oxford Ser. **9**, 148—160 (1938).

The formulae of general transforms are considered in the form

$$g(x) = x^{-\lambda + \frac{1}{2}} \frac{d}{dx} x^{\lambda - \frac{1}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{\lambda}(xy)}{y} f(y) dy$$

and the reciprocal, where

$$\int_0^{\infty} \frac{\chi_{\lambda}(xy) \chi_{\lambda}(yz)}{y^{\frac{1}{2}}} dy = \frac{1}{2\lambda} (xz)^{\frac{1}{2}} \min \left\{ \left( \frac{z}{x} \right)^{\lambda}, \left( \frac{x}{z} \right)^{\lambda} \right\}$$

if  $R(\lambda) > 0$ , and a similar formula if  $R(\lambda) < 0$ . If  $f(x)$  belongs to  $L^2(0, \infty)$  then so does  $g(x)$ . Conditions are obtained under which, if  $f(x)$  belongs to  $L^p$ , where  $1 < p < 2$ , then  $g(x)$  belongs to  $L^{p/(p-1)}$ . Similar problems have been considered by Plancherel, Comment. math. helv. **1**, 273—288 (1929), and Kober, see this Zbl. **17**, 169.

*E. C. Titchmarsh* (Oxford).

**Ogasawara, Tōzō:** Observations on Condon's paper on the Fourier transform. J. Sci. Hiroshima Univ. A **8**, 107—111 (1938).

The author eliminates the use of the Dirac function  $\delta(x)$  and corrects an assertion in the paper of E. U. Condon [Proc. Nat. Acad. Sci. **23**, 158—164 (1937); this Zbl.

**16**, 259] concerning the imbedding of the Plancherel operation  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ixy} f(y) dy$  in a continuous group of unitary transformations in Hilbert space. — *Bochner*.

**Kac, M.:** Quelques remarques sur les zéros des intégrales de Fourier. J. London Math. Soc. **13**, 128—130 (1938).

Let  $K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \cos tx dx$  where  $\Phi \in L(-\infty, \infty)$ , is even and normalized at the points of discontinuity by  $\Phi(x) = \frac{1}{2} [\Phi(x+0) + \Phi(x-0)]$  (and satisfies some other conditions which are not explicitly formulated in the paper). Let  $(2\pi)^{-1} |K(t)| < A$ . The author observes that if for no  $\alpha \geq 0$  there exist a pair of bounded non-decreasing functions  $\varrho_1(\omega), \varrho_2(\omega)$  such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x d\varrho_1(\omega) = Ax^{-1} \sin \alpha x + \Phi(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x d\varrho_2(\omega) = Ax^{-1} \sin \alpha x - \Phi(x)$$

then  $K(t)$  must have infinitely many zeros. This will be the case e.g., if  $\Phi(x)$  admits of a point of discontinuity and also if  $K(t) = \int_0^{\infty} e^{-x^4} \cos tx dx$ . *J. D. Tamarkin*.

**Ignatovskij, V. S.:** Zur Laplace-Transformation. X. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **18**, 511—514 (1938).

Weitere vorläufige Mitteilungen über hyperbolische Randwertaufgaben. *Hille*.



**Churchill, R. V.:** The solution of linear boundary value problems in physics by means of the Laplace transformation. II. Temperatures in a composite wall. *Math. Ann.* **115**, 720—739 (1938).

For Part I, see this Zbl. **17**, 358. The author is now concerned with the problem of the temperature distribution in a wall composed of two layers of different homogeneous materials in perfect thermal contact, with uniform initial temperature, taken as zero, when one exposed surface is retained at this temperature while the temperature of the other is a given function  $F(t)$  of the time. Here  $F(t)$  is supposed to be continuous except for a finite number of discontinuities of the first kind for  $t \geq 0$ , and for some fixed  $\sigma \geq 0$  the product of  $F'(t)$  and  $e^{-\sigma t}$  is bounded and monotone by segments of some minimum length  $\delta > 0$  while in every finite interval  $F'(t)$  has at most a finite number of ordinary discontinuities. The author applies Tauberian theorems to the study of the asymptotic properties of the heat flow in such composite walls, and, in particular, the influence of a sudden drop of the surface temperature. For the temperature function he finds integral and series representations. *E. Hille.*

**Sakurai, Tokio:** The operators in the finite calculus. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. **20**, 190—220 (1938).

In this paper the methods of the Heaviside operational calculus are applied to problems in the calculus of finite differences (instead of to problems in the theory of differential equations). The analogue of the Borel product theorem is given and the question of logarithmic singularities is considered. *Murnaghan* (Baltimore).

**Sakurai, Tokio:** On the complementary Heaviside's operator. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. **20**, 355—364 (1938).

**Carlsaw, H. S.:** Operational methods in mathematical physics. *Math. Gaz.* **22**, 264—280 (1938).

This paper gives an elementary explanation and justification of the methods of the Heaviside operational calculus by means of the Laplace transformation. Many illustrative examples both in ordinary and partial differential equation theory are given. Amongst these are the following: 1. Linear flow of heat in a semi-infinite solid whose boundary is maintained at constant temperature; 2. linear flow of heat in a slab bounded by two parallel planes which are maintained at constant temperatures; 3. flow of heat in a circular cylinder whose surface is maintained at constant temperature; 4. the vibrating string. *Murnaghan* (Baltimore).

### **Funktionalanalysis, Funktionalräume:**

**Maddaus, Ingo:** On completely continuous linear transformations. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 279—282 (1938).

A Banach space is said to be of type  $(A)$  if there exists a linearly independent sequence  $\{f_n\}$  of elements and a double sequence  $\{L_{mn}\}$  of linear functionals such that for every  $g$ ,  $g = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n_m} L_{mn}(g) f_n$ . It is proved that every completely continuous linear transformation of an arbitrary Banach space into a space of type  $(A)$  is the uniform limit of a sequence of singular transformations (i.e., linear functions which transform their domains into spaces of finite dimension). *N. Dunford* (New Haven).

**Visser, Cornelis:** On the iteration of linear operators in a Hilbert space. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **41**, 487—495 (1938).

Ist  $A$  ein linearer Operator im Hilbertschen Raum  $\mathfrak{H}$  der Stellen  $x$  und sind die iterierten Operatoren  $A^n$  gleichmäßig beschränkt ( $|A^n x| \leq M|x|$ ,  $M$  unabhängig von  $n$  und  $x$ ), so konvergiert  $\frac{1}{n}(Ax + \dots + A^n x)$  mit  $n \rightarrow \infty$  schwach gegen einen beschränkten linearen Operator  $Lx$ . Der Fall, daß 1 nicht Eigenwert von  $A$  ist, er-

ledigt sich sehr leicht, und hier wird obendrein  $Lx \equiv 0$ . Der allgemeine Fall kann alsdann unter Benutzung der Lösungsmannigfaltigkeiten von  $Ax = x$  und  $A^*x = x$  sowie ihrer orthogonalen Komplemente und der zugehörigen Projektionsoperatoren ohne Heranziehung weiterer Hilfsmittel behandelt werden. Ist  $A$  speziell ein längentreuer oder ein symmetrischer oder ein vollstetiger Operator, so ergibt sich sogar starke Konvergenz gegen  $Lx$ . Durch den ersten dieser drei Fälle ist im wesentlichen ein von J. v. Neumann (s. dies. Zbl. 4, 310) mit Hilfe der Spektraldarstellung bewiesener und für die Quasi-Ergoden-Theorie grundlegender Satz über Mittelwerte einparametrischer Gruppen unitärer Operatoren einfach bewiesen. Der dritte stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes von M. Fréchet [Quart. J. Math. 5, 106 (1934)]; dies. Zbl. 10, 24] über iterierte Kerne von Integralgleichungen dar. *Hellinger.*

**Rutmann, M. A.:** Sur une classe spéciale d'opérateurs linéaires totalement continus. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 625—627 (1938).

Unter Zugrundelegung der abstrakten Begriffsbildungen von St. Banach werden gewisse lineare Operatoren in passend bestimmten Untermengen definiert, denen in konkreten Spezialfällen Matrizen mit nichtnegativen Elementen bzw. Integralgleichungen mit nichtnegativen Kernen entsprechen. Für sie werden ohne Beweis eine Reihe von Sätzen ausgesprochen, die die bekannten Sätze von O. Perron, G. Frobenius, R. Jentzsch und Ausdehnungen von ihnen auf jene abstrakten Operationen übertragen. Für den Hilbertschen Raum beispielsweise ist darin die Aussage enthalten, daß eine unendliche reelle vollstetige Matrix mit durchweg nichtnegativen Elementen und mindestens einem positiven Diagonalelement einen positiven Eigenwert besitzt, der von keinem anderen Eigenwert an absolutem Betrage übertroffen wird und dessen Eigenvektor nichtnegative Koordinaten hat. *Hellinger (Frankfurt a. M.).*

**Sirvint, J.:** Sur les transformations intégrales de l'espace  $L$ . C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 255—257 (1938).

Betrachtet wird der Raum  $L$  aller im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  mit der zugehörigen Maßbestimmung. Es wird gezeigt, daß

es unter den durch  $U(x) = \int_0^1 K(s, t)x(t)dt$  mit endlichem  $\text{vrai max } |K(s, t)|$  in  $0 \leq s,$

$t \leq 1$  dargestellten linearen Transformationen von  $L$  solche gibt, die nicht vollstetig sind, daß aber das Quadrat jeder Transformation jener Art vollstetig ist. Analoges

gilt für die Transformationen  $U(x) = \int_0^s K(s, t)(s-t)^{\frac{1-m}{m}}x(t)dt$ , wo  $m$  eine natürliche

Zahl ist, mit der Abänderung, daß die  $(m+1)$ -te Potenz jeder solchen Transformation vollstetig ist. *Hellinger (Frankfurt a. M.).*

**Calkin, J. W.:** Abstract self-adjoint boundary conditions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 38—42 (1938).

By consideration of the boundary value problems associated with self-adjoint elliptic partial differential operators, the author has been led to an abstract boundary value theory in Hilbert space. The present paper is a summary announcement of this theory, an extended treatment of which will appear in a memoir now in preparation. The basic concepts of the theory are as follows. Let  $H$  be a closed linear symmetric operator in Hilbert space  $\mathfrak{H}$ . Let  $A$  be a closed linear operator with domain dense in the v. Neumann graph  $\mathfrak{B}(H^*)$  of the adjoint of  $H$  and range dense in a unitary or Hilbert space  $\mathfrak{M}$ . Then  $A$  is called a reduction operator for  $H^*$  if the orthogonal complement in  $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$  of its graph  $\mathfrak{B}(A)$  is the set of all vectors  $\{H^*f, -f, WA\{f, H^*f\}\}$ , where  $W$  is a unitary transformation in  $\mathfrak{M}$  such that  $W^2 = -I$ . Writing  $Af$  for  $A\{f, H^*f\}$  one obtains for such a reduction operator the abstract Lagrange identity

$$(f, H^*g) - (H^*f, g) + (Af, WAf) = 0.$$



If  $\mathfrak{N}$  is a linear manifold in  $\mathfrak{M}$ , the relation  $A \in \mathfrak{N}$  is a linear boundary condition; and the contraction of  $H^*$  which is defined for those  $f$  satisfying such a boundary condition is an extension of  $H$ . Further details cannot be given here. *M. H. Stone.*

**Lubben, R. G.:** Concerning limiting sets in abstract spaces. II. Trans. Amer. Math. Soc. 43, 482—493 (1938).

The author continues here his earlier study [Trans. Amer. Math. Soc. 30, 668—685 (1928)] of the relation between limits of aggregates of sets and properties of abstract spaces. The paper is principally concerned with the distributive property. A topological space is said to have the distributive property if whenever  $K$  is a closed set and  $G$  an aggregate of sets such that each point of  $K$  is in a subset of  $K$  which is the limit of a sub-collection of  $G$  then  $K$  itself is the limit of a sub-collection of  $G$ . Every space  $V$  (the notation of Fréchet is used) which has the distributive property is  $\alpha$ -compact. In order that in a space  $H$  each point set either be condensed in itself or be separable it is necessary and sufficient that every point set be  $\alpha$ -compact in itself. A sufficient condition that a Hausdorff space have the distributive property is that it be locally compact and have the Lindelöf property and that every closed set in it be separable. Many results of this same type are obtained. *Montgomery.*

**Suchomlinov, G.:** Analytische Funktionale. Bull. Univ. État Moscou, Sér. Int., Sect. A: Math. et Mécan. 1, Fasc. 2, 1—19 u. dtsch. Zusammenfassung 20 (1937) [Russisch].

Let  $Z$  be a complex Banach space,  $f(z)$  a complex-valued functional,  $z \in Z$ . The author introduces various kinds of differentials of  $f$ , of which we mention the "weak" differential  $C_1(z, h) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}[f(z + th) - f(z)]$ ,  $\|h\| = 1$  and the "strong" differential of Fréchet  $A_1(z, h)$ , such that  $f(z + h) - f(z) = A_1(z, h) + \varepsilon \|h\|$  where  $\varepsilon \rightarrow 0$  with  $\|h\| \rightarrow 0$  ( $t$  is a complex number). Differentials of higher orders are introduced. A functional  $f(z)$  is said to be analytic if it has at each point  $z$  a weak differential in each "direction"  $h$ . It is shown that such functionals also have strong differentials of all orders and can be expanded in a Taylor series. Cauchy formula for analytic functionals is also discussed. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

### Funktionentheorie:

**Wolff, Julius:** Les trajectoires définies par l'équation  $dz/dt = w(z) =$  fonction holomorphe à partie réelle positive dans le demi-plan  $D(x > 0)$ . C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1546—1548 (1938).

States, without proof, a number of results derived from the conformal representation given by the function  $\int dz/w(z)$ . *Macintyre* (Aberdeen).

**Rogosinski, Werner:** Über beschränkte Potenzreihen. II. Compositio Math. 5, 442—476 (1938).

Im Teil I (dies. Zbl. 17, 269) hat Verf. untersucht, welche Werte  $w$  annehmen kann, damit es eine für  $|z| < 1$  reguläre, beschränkte Funktion  $f(z) = \alpha z + \dots$  ( $|f(z)| \leq 1$ ) gibt, die in vorgegebenen Punkten  $\zeta_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ;  $0 < |\zeta_k| \leq |\zeta_{k+1}| < 1$ ) den Wert  $w$  annimmt; es war nicht notwendig, daß die Punkte  $\zeta_k$  die Gesamtheit der  $w$ -Stellen von  $f(z)$  bildeten. Nun wird dasselbe Problem für den Fall gelöst, wo  $f(z) \neq w$  für  $z \neq \zeta_k$ . — Es sei wieder  $E_\alpha$  bzw.  $E_+$  diejenige Unterklasse der Funktionen  $f(z)$ , für welche  $\alpha \geq 0$  fest bzw.  $\alpha \geq 0$  ist; sei ferner

$$P = \prod_k |\zeta_k|, \quad S = \sum_k \frac{1 - |\zeta_k|^2}{\zeta_k}, \quad P(z) = \prod_k \frac{z - \zeta_k}{z \bar{\zeta}_k - 1} \frac{|\zeta_k|}{\zeta_k}.$$

Dann genügt jedes zulässige  $w$  für die Klasse  $E_\alpha$  der genauen Abgrenzung

$$\left| \alpha \frac{1 - |w|^2}{w} - S \right| \leq 2 \log \frac{P}{|w|},$$

wo das Gleichheitszeichen nur bei den Funktionen

$$\frac{f(z) - w}{f(z)\bar{w} - 1} = \frac{w}{|w|} P(z) \left( \frac{|w|}{P} \right)^{\frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}}$$

mit passend gewähltem  $\varepsilon$ ,  $|\varepsilon| = 1$ , richtig ist. Durch Variation von  $\alpha \geq 0$  erhält man genaue Abgrenzung für  $w$  innerhalb der Klasse  $E_+$ . Die Abgrenzungen werden genauer diskutiert, und das Wertgebiet von  $f(z)$  bei einer gegebenen  $w$ -Verteilung und festem  $z$  wird auch bestimmt. — Unter den Folgerungen und Spezialfällen sei noch folgendes erwähnt: Falls die Folge  $(\zeta_k)$  leer ist, so ergibt sich ein Satz von Landau [Math. Z. 30, 620 (1929)], nach welchem die Funktionen der Klasse  $E_\alpha$  mindestens die Werte einer gewissen, genau angegebenen Kreisscheibe annehmen; dieser Satz wird auch verallgemeinert. Falls die Folge  $(\zeta_k)$  nur einen Punkt enthält, so erhält man Abschätzungen für  $f(z)$  und  $f'(z)$  in einem Schlichtpunkt  $\zeta$  [d. i.  $f(z) \neq f(\zeta)$  für  $z \neq \zeta$ ]. V. Paatero (Helsinki).

**Dinghas, Alexander:** Über das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip und einige andere verwandte Sätze. S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1938, 123—140.

Unter der Annahme, daß  $f(z)$  auf der imaginären Achse  $A$  (oder doch bei Annäherung an sie) beschränkt, in der rechten Halbebene  $H$  aber unbeschränkt sei, geben die neueren Fassungen des Phragmén-Lindelöfschen Satzes Aussagen über das Wachstum des Integralwerts

$$m_\alpha(r) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [\log |f(re^{i\varphi})|]^\alpha d\varphi$$

für  $\alpha = 1$ . Carleman hat [C. R. Acad. Sci., Paris 196 (1933); dies. Zbl. 6, 316] durch Behandlung dieses Mittelwertes für  $\alpha = 2$  mit Hilfe einer Differentialungleichung unerwartet einfach einen Beweis des Denjoy-Carleman-Ahlfors'schen Randstellensatzes erzielen können. — Der Verf. benutzt jetzt Carlemans Methode, z. T. unter leichten Verallgemeinerungen, um zu beweisen: 1.  $m_2(r)$  und  $m_1(r)^2$  sind konvex in  $r^2$ ; daher wachsen  $m_1(r):r$  und  $\sqrt{m_2(r)}:r$  monoton gegen einen positiven oder unendlichen Grenzwert. 2. Ist  $f(z)$  in  $H$  von einer Wachstumsordnung  $\rho < 1$ , so kann auf  $A$  nicht mehr Beschränktheit gelten, sondern es muß ein Mindestwachstum für das Mittel  $\mu(r) = \frac{1}{2}(\log^+ |f(ir)| + \log^+ |f(-ir)|)$  bestehen, derart daß  $\lim \mu(r):m_1(r) \geq \frac{1}{2}(1 - \rho^2)$  wird, was für  $e^{\sigma^2}$  als scharfe Aussage erkennbar ist. 3. Macht man auf einer Teilmenge  $E$  von  $A$  die Annahme  $\mu(r) \leq \frac{1}{2}(1 - \sigma^2)m_1(r)$ , so wird die „untere Dichte“ von  $E$  kleinergleich  $\rho:\sigma$ . Ulrich (Gießen).

**Pfluger, Albert:** Sur la variation de l'argument et la distribution des zéros d'une certaine classe de fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1786—1787 (1938).

L'aut. étudie les fonctions  $f(z)$  qui sont holomorphes, du type moyen de l'ordre  $\rho$  dans un angle  $\alpha < \arg z < \beta$ , et telles que,  $h(\varphi)$  étant l'indicatrice de croissance, on ait  $|\log |f(re^{i\varphi})| - h(\varphi)r^\rho| < \varepsilon r^\rho$ ,  $\alpha < \varphi < \beta$ , pour  $\varepsilon > 0$  arbitraire, et pour  $0 < r < \infty$ , excepté au plus pour un ensemble de mesure linéaire nulle. S'appuyant sur un résultat de Miss L. Cartwright [Quart. J. Math., Oxford Ser. 1, 44—46 (1930)], il montre que, pour chaque  $\varphi$  pour lequel  $h(\varphi)$  est dérivable, on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\arg f(re^{i\varphi})}{r^\rho} = -\frac{1}{\rho} h'(\varphi),$$

$\arg f(re^{i\varphi})$  étant défini par prolongement continu dans le voisinage de  $\arg z = \varphi$ . Il en déduit que  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{\arg f(re^{i\theta})\} d\theta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} h(\theta) d\theta$ , d'où il suit que le nombre des zéros dans le secteur  $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$ ,  $0 \leq |z| \leq r$  est asymptotiquement égal à

$$\frac{r^\rho}{2\pi} \left\{ \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} h(\theta) d\theta + \frac{1}{\rho} [h'(\varphi_2) - h'(\varphi_1)] \right\}.$$

Ceci conduit à des réciproques de résultats antérieurs de l'aut. (voir ce Zbl. 17, 269). G. Valiron (Paris).

**Onofri, Luigi:** Sul numero degli zeri di certe serie di Laurent. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 17, 169—176 (1938).

The methods which the author has used in a previous paper (this Zbl. 13, 271)



to discuss the zeros of certain power series are now used to determine the zeros of Laurent series in a given annulus. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Martin, W. T., and N. Wiener:** Taylor's series of functions of smooth growth in the unit circle. *Duke math. J.* 4, 384—392 (1938).

Es werden Sätze Tauberscher Art gegeben für im Einheitskreis konvergente Potenzreihen  $\sum a_n x^n$  mit positiven Koeffizienten, wenn sich dieselben bei  $x \rightarrow 1$  asymptotisch verhalten wie  $\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$  oder allgemeiner wie eine genügend schnell wachsende Funktion  $H(x)$ . Dabei sind die Bedingungen, welchen diese Funktion  $H(x)$  genügen muß, wie auch die Sätze und die Beweise gleichgeartet wie die der Arbeit der Verf.: *Taylor's series of entire functions of smooth growth. Duke math. J.* 3, 213—223 (1937) (dies. Zbl. 16, 406). *Karamata* (Beograd).

**Wiener, Norbert:** Gap theorems. (*Oslo, 14.—18. VII. 1936.*) *C. R. congr. int. Math.* 1, 284—296 (1937).

L'A. passe en revue plusieurs théorèmes sur les séries lacunaires; ces théorèmes concernent les séries de Taylor, les séries de Dirichlet et celles de Fourier. Les démonstrations que l'A. donne à ces théorèmes sont, en grande partie, liées à son beau théorème: La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction entière  $G(u)$

soit telle que  $|G(u)| < e^{A|u|}$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|^2 d\tau < \infty$ , est que  $G(u) = \int_{-A}^A e^{iux} g(x) dx$ . La

première moitié du mémoire est consacrée aux théorèmes concernant les singularités des séries de Dirichlet lacunaires, et notamment aux théorèmes du genre de ceux démontrés par MM. Fabry et Pólya. La seconde moitié est consacrée aux nouvelles démonstrations des théorèmes de M. Mandelbrojt concernant la quasi-analyticité des séries de Fourier. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

**Jackson, Dunham:** Orthogonal polynomials in two complex variables. *Ann. of Math.*, II. s. 39, 262—268 (1938).

Der Verf. betrachtet Systeme von Polynomen  $p_{nh}(z_1, z_2)$  von zwei komplexen Veränderlichen, welche die Orthogonalitätsbeziehung  $\int_{\mathfrak{D}^m} \rho p_{nh} \bar{p}_{lk} d\omega = 0$ ,  $|n-l| + |h-k| > 0$ ,

befriedigen.  $\rho$  ist irgendeine in  $\mathfrak{D}^m$  definierte positive Funktion,  $p_{nh}$  ein Polynom  $n$ -ten Grades und  $\mathfrak{D}^m$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit des vierdimensionalen Raumes. (Ist  $m = 1$  oder 2, so muß darauf geachtet werden, daß die  $p_{nh}$  linearunabhängig sind.) — Als Beispiele wählt der Verf.  $\rho = 1$  und als  $\mathfrak{D}^m$  nimmt er den Einheitsbizzylinder ( $|z_k| < 1$ ,  $k = 1, 2$ ,  $m = 4$ ), seine Berandung ( $m = 3$ ), seine ausgezeichnete Randfläche ( $|z_k| = 1$ ,  $m = 2$ ), die Einheitshyperkugel ( $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$ ,  $m = 4$ ), ihre Berandung ( $m = 3$ ), einen Reinhardtschen Kreisbereich ( $m = 4$ ). — Der Verf. beweist ferner: Existiert zu einer Funktion  $f(z_1, z_2)$  eine Folge von Polynomen  $\pi_n(z_1, z_2)$ , so daß in  $\mathfrak{D}_1^3 = E(|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} |f - \pi_n| = 0$  gilt, so konvergiert die Ent-

wicklungsreihe nach Orthogonalpolynomen von  $f$  in  $\mathfrak{D}_1^3$  gleichmäßig gegen  $f$ . — Ist  $P_n(z_1, z_2)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades, für den in  $\mathfrak{D}_2^3 = E(|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1)$   $|P_n| \leq L$  gilt, so ist in  $\mathfrak{D}_2^3$   $|\partial P_n / \partial z_k| \leq 2nL$ ,  $k = 1, 2$ . — Bei den Beweisen benutzt der Verf. z. T. die entsprechenden Sätze für den Fall einer komplexen Veränderlichen. — Der Ref. sieht die Bedeutung dieser Ergebnisse auch darin, daß sie leicht verwandte Sätze ergeben über Funktionen von vier reellen Veränderlichen, die gewisse lineare, partielle Differentialgleichungen befriedigen. *Stefan Bergmann* (Paris).

## Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Bayly, B. de F.: Gauss' quadratic formula with twelve ordinates. *Biometrika* 30, 193—194 (1938).

**Neyman, J.:** A historical note on Karl Pearson's deduction of the moments of the binomial. *Biometrika* 30, 11—15 (1938).

**Pitman, E. J. G.:** Significance tests which may be applied to samples from any populations. *J. Roy. Statist. Soc.* 4, Suppl., 119—130 (1937).

**Pitman, E. J. G.:** Significance tests which may be applied to samples from any populations. II. The correlation coefficient test. *J. Roy. Statist. Soc.* 4, Nr 2, Suppl., 225—232 (1937).

The object of these papers is to show how to devise valid tests of significance for finite samples involving no assumptions about the form of the population sampled. In the first paper the question of difference of means is handled. In the second paper tests of dependence are considered. A separation of  $m + n$  measurements into two classes of  $m$  and  $n$  respectively is examined in relation to an arbitrarily chosen integer  $M$  less than the total number of separations of the two collections into two classes of  $m$  and  $n$  measurements respectively. The spread of a separation is defined as the absolute difference between the means of the separated classes. If the number of possible separations with a spread not less than that of a given separation is not greater than  $M$ , then the given separation is defined as discordant. Concordant and neutral separations are defined analogously. The ideas are applied to pairs or samples from a given population, and fiducial limits are obtained. The distribution of the square of the difference between the sample mean and the population mean when the sample is drawn without replacement from a finite population is obtained in exact form and studied further by means of an approximation, with applications. In practice the work reduces frequently to Fisher's extension of Student's test. — Using the correlation coefficient instead of the spread, the separation is described as significant, non-significant or doubtful with respect to a selected integer  $M$  less than  $n!$  where  $n$  is the number of measurements in each of two separated classes. The results obtained are found to be those of the usual test based upon the assumption of a normal universe. A critical examination of the usual procedure for the analysis of variance in the light of ideas here developed suggests to the author that some modifications might be appropriate to free the method from its present assumptions. *Albert A. Bennett* (Providence).

**Bartlett, M. S.:** Sub-sampling for attributes. *J. Roy. Statist. Soc.* 4, Suppl., 131—135 (1937).

The author compares fiducial limits obtained in more than one way, (1) by the chart of Clopper and Pearson [see *Biometrika* 26, 404—413 (1934)]; (2) by the normal approximation to the binomial with fractional correction for discontinuity; (3) by the use of  $\sin^{-1}\sqrt{p}$ ; (4) by the mean of (2) and (3); (5) by an exact method. Application is made to numerical examples cited from the literature. *Bennett*.

**Finney, D. J.:** The distribution of the ratio of estimates of the two variances in a sample from a normal bi-variate population. *Biometrika* 30, 190—192 (1938).

The result given by Bose for the distribution of the ratio  $\omega$  of estimates of two variances  $s_1^2, s_2^2$  in a sample from a normal bi-variate population is developed by the evaluation of the probability integral for the distribution. The distribution of  $\omega$  reduces to the particular case obtained by Fisher for the ratio of two independent estimates of a variance. It is then shown how, by the transformation  $\omega^2 + \omega^{-2} = e^{2z} + e^{-2z} - \rho^2(e^{2z} + e^{-2z} - 2)$  of existing tables, a test of significance may be applied when the population correlation coefficient  $\rho$  is known. When only a sample estimate of  $\rho$  is available, the method suggested by Hirshfeld can be adopted. Test of significance is applied to the results of measurements of standing height and stem length for different age groups of schoolboys. *Janko* (Praha).

**Hey, G. B.:** A new method of experimental sampling illustrated on certain non-normal populations. *Biometrika* 30, 68—80 (1938).



## Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

**Hadwiger, H.:** Zur Berechnung der Erneuerungsfunktion nach einer Formel von V. A. Kostitzin. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 34, 37—43 (1937).

Für  $t \geq 0$  sei  $p(t)$  die Wahrscheinlichkeit, daß eine zur Zeit 0 einem Bestande angehörende Person auch noch zur Zeit  $t$  diesem Bestande angehört. Die Lösung  $\varphi(x)$

der Integralgleichung  $1 = p(t) + \int_0^t p(t-x) \cdot \varphi(x) dx$  heißt „Erneuerungsfunktion“

für den stationären Fall. Verf. wählt  $p(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$  mit  $\lambda > 0$  und findet  $\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} [1 - e^{-2\lambda x}]$ . Damit ist u. a. gezeigt, daß die Erneuerungsfunktion auch bei plausiblen Annahmen über  $p(t)$  nicht immer wellenförmig verläuft, wie in der Literatur häufig angedeutet wird. *Birnbaum* (New York).

**Dubourdieu, Jules:** Les fonctions absolument monotones et la théorie mathématique de l'assurance-accidents. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 556—557 (1938).

The author sketches a proof of S. Bernstein's theorem (Acta math. 52, 1—66) that an absolutely monotone function  $p(t)$  [on the interval  $(0, +\infty)$ ] can be put in the form  $p(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} d\Phi(\lambda)$ , where  $\Phi(\lambda)$  is monotone non-decreasing. Such functions

occur in a certain probability problem discussed by the author in a previous paper (this Zbl. 18, 417). The author gives further characterizations of the distributions involved. Events are to occur in such a way that knowing that exactly  $n$  have occurred in the time interval  $(0, \alpha)$  at times  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \alpha$ , the probability of a further event occurring at time  $t > \alpha$  is a function depending only on  $n, \alpha$ . The expected number of events in a time interval is proportional to the length of the interval.

*J. L. Doob* (Urbana).

**Dasen, Ed.:** La méthode d'interpolation de Fredrik Esscher dans l'assurance vie et invalidité. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 34, 1—16 (1937).

Im Definitionsintervall der Funktion  $f(x)$  seien die Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  gegeben. F. Esscher gab (Försäkringsaktiebolaget Skandia, Stockholm 1930) hinreichende Bedingungen dafür, daß  $f(x)$  durch eine von  $n+1$  Parametern abhängige Funktion  $y(x) = F(x, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ , die der Bedingung  $y(x_\nu) = f(x_\nu)$ ,  $\nu = 0, \dots, n$  genügt, im ganzen Intervall besser approximiert wird, als durch das Newtonsche Interpolationspolynom. Das Esschersche Verfahren wird auf  $y(x) = a_0 + a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x}$  angewendet und zur Interpolation von Rentenbarwerten auf Grund von Sterbe- bzw. Invaliditätstafeln gebraucht, welche nach Makeham bzw. Behm-Urech ausgeglichen sind. Die Barwerte werden für Anfangsalter von 5 zu 5 Jahren exakt gegeben und dazwischen interpoliert, wobei es sich zeigt, daß das neue Interpolationsverfahren zwar nicht immer besser ist als das Newtonsche, daß es jedoch numerisch viel schneller zum Ziele führt. *Birnbaum* (New York).

**Beutling, Kurt:** Die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten in der Versicherungsmathematik und ihr Verhältnis zu den abhängigen. Berlin: Diss. 1938. 43 S. u. 5 Taf.

## Numerische und graphische Methoden.

**Neuschuler, L.:** Sur les tables des produits d'étendue minimum. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 18, 259—262 (1938).

Umriss einer Theorie über die kürzeste Anordnung von Funktionentafeln durch Zerlegen der Werte von Argument und Funktion in Zifferngruppen. Beispiel: Vertafelung der linearen Funktion  $y = ax$ . *Theodor Zech* (Darmstadt).

**Nyström, E. J.:** Nomogramme zur Konstruktion von Kettenlinien. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 9, H. 16, 1—7 (1937).

Für die Aufgabe, eine Kettenlinie zu konstruieren, wenn zwei ihrer Punkte und

ihre Achse gegeben sind, wird eine Fluchtentafel mit zwei geradlinigen und einer krummen Leiter hergestellt. Für die Konstruktion einer Kettenlinie, von der zwei Punkte und die Länge des dazwischenliegenden Bogens bei bekannter Lotrichtung gegeben sind, wird ein Stechzirkelnomogramm angegeben. *Eckhart* (Wien).

**Banachiewicz, T.:** Principes d'une nouvelle technique de la méthode des moindres carrés. Bull. int. Acad. Polon. Sci. 1938, 134—135.

Ist  $K$  die Matrix der Koeffizienten der Normalgleichungen und  $Q$  die dazu inverse, so kann man aus den reduzierten Normalgleichungen, indem man jede durch die Quadratwurzel aus ihrem Diagonalkoeffizienten dividiert, eine Matrix  $k$  gewinnen, die mit sich selbst zusammengesetzt  $K$  ergibt; die zu  $k$  inverse Matrix  $q$  ist die der Gewichtskoeffizienten und liefert mit sich selbst zusammengesetzt  $Q$ . Bei der Darstellung werden die „Krakovianen“ verwendet (vgl. dies. Zbl. 17, 416). *L. Schrutka*.

**Chromiński, A.:** Application des cracoviens à la résolution rapide de divers problèmes d'analyse pratique. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1938, 1—9.

Mit Hilfe der Krakovianen von Banachiewicz (s. darüber dies. Zbl. 17, 416) werden die Formeln für die Ableitung des Quotienten zweier Polynome, für einen linearhomogenen Ausdruck der Ableitungen eines Polynoms, für den Quotienten zweier Polynome (samt Rest), für die Maclaurinsche Entwicklung des Quotienten zweier Polynome, ferner Teilbarkeitsaussagen für die Werte eines Polynoms, die Entwicklung einer Determinante, die Auflösung linearer Systeme und die Integration rationaler Funktionen dargestellt. *L. v. Schrutka* (Wien).

**Stankiewicz, L.:** Sur les opérations arithmétiques dans le calcul des déterminants d'après les méthodes à cracoviens de M. T. Banachiewicz. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1938, 10—23.

Wird eine quadratische Matrix durch eine Waagrechte und eine Senkrechte in vier Teilmatrices zerlegt, von denen die auf der Hauptdiagonale sitzenden quadratisch sind, so gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = \det(\mathfrak{A}) \cdot \det(\mathfrak{D} - \mathfrak{C}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}).$$

(Die Verwendung der Krakovianen [s. dies. Zbl. 17, 416] bringt gewisse Veränderungen in den Formeln mit sich.) Hierauf gründen sich Verfahren zur Ausrechnung von Determinanten. Man kann entweder den zweiten Faktor der Formel neuerlich nach dieser selben Formel umformen (totale Verdichtung; wenn noch gewisse Abkürzungen der Rechnung ausgenützt werden, partielle Verdichtung) oder man kann von der Teilmatrix  $\mathfrak{A}$  zu einer Teilmatrix höherer Ordnung übergehen (Ränderung). In allen Fällen können noch die Zeilen- (und Spalten-) Anzahlen auf die verschiedensten Arten gewählt werden. Es werden nun die Anzahlen der erforderlichen Teiloperationen bei diesen verschiedenen Möglichkeiten bestimmt. Als günstigstes Verfahren ergibt sich die partielle Verdichtung. Hierbei wird allerdings eine Annahme über das Verhältnis der Mühe bei Addition und Multiplikation gemacht. *L. Schrutka*.

**Stankiewicz, L.:** Sur les opérations arithmétiques dans la résolution numérique d'un système d'équations linéaires suivant les méthodes à cracoviens de M. T. Banachiewicz. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1938, 24—32.

Die Verfahren der totalen und partiellen Verdichtung und der Ränderung (s. den vorigen Bericht) finden auch bei der Auflösung der linearen Systeme Anwendung. Es werden auch hier die Anzahlen der notwendigen Teiloperationen bestimmt.

*L. v. Schrutka* (Wien).

**Frazer, R. A., W. P. Jones and Sylvia W. Skan:** Note on approximations to functions and to solutions of differential equations. Philos. Mag., VII. s. 25, 740—746 (1938).

Es werden bekannte Näherungsmethoden (z. B. die Methode der kleinsten Quadrate und die Methode von Galerkin) miteinander verglichen und für die Behandlung linearer Differentialgleichungen herangezogen. *Rehbock* (Bonn).



**Shortley, G. H., and R. Weller:** The numerical solution of Laplace's equation. *J. appl. Physics* 9, 334—344 (1938).

Zur numerischen Auflösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie wird in Anlehnung an Liebmann ein Iterationsverfahren vorgeschlagen, bei dem man die Potentialwerte in Punkten eines quadratischen Netzes „blockweise“ verbessert. Die Blöcke bestehen aus Quadraten von z. B. 9 (oder auch 4 oder 25 usw.) Netzpunkten. Verbessert wird mit expliziten Formeln für die Randwertaufgabe erster Art bei quadratischem Gebiet. Der Vorteil dieses Verfahrens ist rasche Konvergenz bei hoher Punktzahl im Gesamtnetz, also guter Annäherung. Der Konvergenzbeweis ließe sich leicht unmittelbar an die bekannten Beweise für die Konvergenz des gewöhnlichen Liebmannschen Verfahrens anlehnen, wird jedoch mit Matrizenrechnung ausführlich vorgerechnet. Besondere praktische Ratschläge gibt der Verf. für die Wahl der Ausgangsfunktion, für die Verbesserung in der Nähe des Randes und für Extrapolation des Konvergenzergebnisses aus einigen Zwischenergebnissen in jedem Gebietpunkt.

*Theodor Zech* (Darmstadt).

● **Schleusner, A.:** Zur Konvergenz des Engesser-Vianello-Verfahrens. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1938. 45 S. u. 12 Abb. RM. 3.—.

Das von Engesser und Vianello entwickelte Iterationsverfahren gibt uns die Möglichkeit, den kleinsten (reell und positiv vorausgesetzten) Eigenwert eines homogenen Randwertproblems zweiter Ordnung in schrittweiser Annäherung zu bestimmen. Bei der Anwendung dieser Methode auf die verschiedenen Eigenwertprobleme der Stabilitätstheorie (vgl. dazu Pohl, *Zbl. Mech.* 1, 299; Weinhold, *Zbl. Mech.* 3, 13; Stüssi, *Zbl. Mech.* 3, 343) wird von einer Deformationsfigur  $v_0 = v_0(x)$  ausgegangen, von der man voraussetzen pflegt, daß sie den Randbedingungen des Problems genügt und dem Verlaufe nach „plausibel“ ist. Der Verf. stellt sich nun die Aufgabe, diese der Ausgangsfunktion  $v_0(x)$  aufzuerlegenden, die Konvergenz des Verfahrens sicherstellenden Bedingungen schärfer zu fassen [vgl. dazu auch Mises, *Mh. Math. Phys.* 22, 40 (1911); Trefftz, *Z. angew. Math. Mech.* 3, 275 (1923); Ratzersdorfer, *Zbl. Mech.* 5, 53]. Ausgehend von den aus der Theorie der homogenen Randwertprobleme zweiter Ordnung fließenden Lehrsätzen legt er dar, daß die Konvergenz gewährleistet ist, wenn  $v_0(x)$  stückweise stetig verläuft, eine stückweise quadratisch integrierbare Ableitung besitzt und bei der Entwicklung nach den Eigenfunktionen des Problems die dem gesuchten Eigenwert zugeordnete Eigenfunktion enthält; je mehr diese Eigenfunktion in der Entwicklung hervortritt, je „plausibler“ also der Verlauf der angenommenen Deformationsfigur ist, um so besser konvergiert das Verfahren. Die Erfüllung der Randbedingungen braucht jedoch von der Ausgangsfunktion nicht gefordert zu werden. Die gefundenen Ergebnisse werden an Hand von sieben Zahlenbeispielen eingehend erörtert.

*E. Chwalla* (Brünn).<sup>oo</sup>

## Geometrie.

**Merz, K.:** Einseitige Polyeder aus dem Tetraeder. *Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich* 83, 108—112 (1938).

**Motzkin, Th.:** Sur les arcs plans dont les courbes osculatrices ne se coupent pas. *C. R. Acad. Sci., Paris* 206, 1700—1701 (1938).

Sei eine  $n$ -parametrische Familie  $S$  beschränkter, geschlossener Kurven gegeben, so daß in bezug auf die Parameter benachbarte Kurven nicht mehr als  $n - 1$  Schnittpunkte haben. Dann ist  $n$  ungerade. Wird irgendeine Kurve  $T$  von keiner Kurve  $S$  in  $n$ -ter Ordnung berührt, so schneiden sich die Kurven  $S$ , die  $T$  in  $(n - 1)$ -ter Ordnung berühren, nicht, sondern sind ineinander enthalten. Daraus folgt, daß  $T$  einfach und offen ist. Beweis mit einer noch nicht veröffentlichten Verallgemeinerung des Satzes von Rolle.

*Lochs* (Kennelbach).

**Lampariello, G.:** Sulla composizione dei movimenti secondo il Poincaré. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 27—31 (1938).

Eine Stelle in Poincarés Cours de cinématique bringt einen vermeintlichen Beweis für den unrichtigen Satz, wonach die auf Grund der Addition der jeweiligen Geschwindigkeitsvektoren definierte resultierende Bewegung zweier starrer Bewegungen wieder starr ist. Verf. weist auf die Fehlerquelle hin und verifiziert analytisch, daß die Behauptung freilich nur in dem trivialen Fall gilt, in welchem höchstens eine der beiden starren Komponentenbewegungen keine Translation ist. *Wintner* (Baltimore).

**Blaschke, Wilhelm:** Riflessioni sulla cinematica classica. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 2, 130—135 (1938).

Zweck dieser Arbeit ist, das Studium der kontinuierlichen Bewegungen mit mehr als einem Freiheitsgrad anzuregen. Sind  $u, v$  die beiden Parameter einer Bewegung einer Ebene in einer andern, so wird durch  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  eine Bewegung eines Freiheitsgrades bestimmt, deren Momentanzentrum für ein bestimmtes  $t$  nicht nur von  $u, v$ , sondern auch von  $du/dv$  abhängt. Für bestimmte  $u, v$  und variables  $du/dv$  liegen die Momentanzentren im festen und im beweglichen System auf Geraden, den Momentanachsen. So ergibt sich eine Zuordnung zwischen den Geraden des festen und denen des beweglichen Systems, die nicht willkürlich vorgeschrieben werden kann: die Geradendichte muß bei der Zuordnung erhalten bleiben (s. dies. Zbl. 12, 34 u. 414). Das Spiegelbild der bewegten Ebene an ihren jeweiligen Momentanachsen beschreibt die „reziproke Bewegung“, die von der inversen verschieden ist. Ein Spezialfall ist die Bewegung, deren reziproke Bewegung die Ruhe ist. — So kann eine Differentialgeometrie der zweiparametrischen Bewegungen aufgestellt werden, die der Differentialgeometrie der Flächen im Raum analog ist. Die Lagen einer Ebene auf einer andern können auf die Punkte eines  $R_3$  so abgebildet werden, daß die Spiegelbilder einer bestimmten Lage an den Geraden der Ebene den Punkten einer Ebene entsprechen. Die Metrik dieses  $R_3$  ist ausgeartet, die beiden Geradenscharen ihrer absoluten Fläche 2. O. sind Geradenbüschel. — Kurzer Hinweis auf zweiparametrische Bewegungen im Raum. *Lochs* (Kennelbach).

**Banachiewicz, T.:** Sur les rotations dans l'espace à 4 dimensions et les deux aspects des équations fondamentales de la polygonométrie sphérique. Bull. int. Acad. Polon. Sci. 1938, 127—133.

Analytischer Beweis einer vom Verf. früher [C. R. Acad. Sci., Paris 185, 1116 (1927)] aufgestellten Aussage. Bei der Darlegung werden die „Krakovianen“ des Verf., eine Art Matrices, verwendet; Näheres über diese s. etwa dies. Zbl. 17, 416.

*L. Schrutka* (Wien).

**Wunderlich, Walter:** Kinematische Erzeugung eines Dreiecksnetzes aus Trochoiden. Z. angew. Math. Mech. 18, 195—196 (1938).

Verf. beweist den folgenden Satz: „Man teile den Umfang eines Kreises vom Halbmesser 2 in eine gerade Anzahl gleicher Teile und projiziere die Teilpunkte senkrecht auf einen von zwei Teilpunkten begrenzten Durchmesser. Rollt nun dieser Kreis in einem zweiten vom Halbmesser 3, dann beschreiben die Projektionen Hypotrochoiden, die einer Steinerschen Hypozykloide“ (die von den Endpunkten des Durchmessers beschrieben wird) „eingeschrieben sind und in deren Innern ein Dreiecksnetz bilden.“

*W. Meyer zur Capellen* (Aachen).

**Bequé, Jean:** Détermination vectorielle d'une formule de déplacement hélicoïdal. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Sér. I, 58, 102 (1938).

**Barbilian, D.:** Der Riemannsche Raum kubischer Binärformen. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 345—351 (1938).

Binäre kubische Formen haben 4 Koeffizienten und lassen sich daher auf die Punkte eines 3-Raumes abbilden. Die Formen mit Diskrim. = 0 ergeben dabei eine Torse, die mit negativer Diskrim. das Innere  $\mathcal{O}$  dieser Torse.  $\mathcal{O}$  ist topologisch homöomorph einem Torus. Die binäre projektive Gruppe induziert eine Gruppe  $G_3$  von Trans-



formationen von  $\mathcal{O}$  in sich. Unter allen gegenüber  $G_3$  invarianten quadratischen Differentialformen  $ds^2$  gibt es eine (indefinite) mit konstanter Krümmung. — Das Innere  $\mathcal{C}$  eines Hyperboloids  $AD - BC > 0$  kann auf  $\mathcal{O}$  folgendermaßen abgebildet werden:

Die Transformation  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  führt eine feste kubische Form  $f_0$  in eine Form  $f$  über, deren Bildpunkt in  $\mathcal{O}$  als Bild des Punktes  $(A, B, C, D)$  von  $\mathcal{C}$  betrachtet wird. Bei dieser Abbildung geht die durch das Hyperboloid induzierte Cayleysche Metrik in die ausgezeichnete Metrik  $ds^2$  von  $\mathcal{O}$  über. Die Abbildung ist (1, 3)-deutig und führt zu einer Gruppe von drei Decktransformationen 1,  $H, H^2$  in  $\mathcal{C}$ , wo  $H$  eine Cliffordsche Parallelverschiebung ist. Die Bilder der Geraden in  $\mathcal{C}$ , also die geodätischen Linien in  $\mathcal{O}$ , sind gewisse kubische Raumkurven. Bildet man  $\mathcal{C}$  auf die hyperbolische Ebene ab, indem man zu jeder kubischen Form von  $\mathcal{C}$  die Hessesche (quadratische) Form bildet, so ergibt sich ein Satz über den nichteuklidischen Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Seiten gewisse Kegelschnittbogen sind. van der Waerden (Leipzig).

**Reutter, Fritz: Differentialgleichungen erster Ordnung und Berührungstransformationen im Linienraum mit Anwendungen auf die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz.** Karlsruhe: Diss. 1937 (1938). 61 S. u. 8 Fig.

Sind  $p_1, \dots, p_6$  homogene Plückersche Linienkoordinaten, so unterliegen die Veränderlichen  $p_i$  der Pfaffschen Gleichung:

$$\sum_{i=1}^6 \varphi_{i+3}(p_i) dp_i = 0 \quad (\text{mod } 6) \quad (1)$$

von vornherein der Plückerschen Fundamentalrelation

$$R(p_i) = \sum_{i=1}^6 p_{i+3} p_i = 0 \quad (\text{mod } 6). \quad (2)$$

Ist (1) volls ändig integrabel [unter Berücksichtigung von (2)], so ist die allgemeine Lösung durch  $\infty^1$  Strahlkomplexe gegeben. Dann genügt es, (1) und (2) durch zwei weitere (unabhängige) lineare Relationen

$$A = \sum_{i=1}^6 a_{i+3} p_i = 0, \quad B = \sum_{i=1}^6 b_{i+3} p_i = 0 \quad (\text{mod } 6) \quad (3)$$

zu ergänzen, um vermöge (1)  $\infty^1$  Regelscharen im Strahlensystem (3) zu bestimmen. Umgekehrt ist diese Bedingung auch notwendig. — Elimination dreier Variabler mittels (2) und (3) sowie Übergang zu inhomogenen Veränderlichen assoziiert dann der Gleichung (1) die Differentialgleichung

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0. \quad (4)$$

Singulären Punkten von (4) (Sattelpunkten, Knotenpunkten, Wirbelpunkten, asymptotischen Punkten) in der  $x, y$ -Ebene entsprechen jetzt singuläre Strahlen von (1) (Sattelstrahlen, Knotenstrahlen, Wirbelstrahlen, asymptotische Strahlen) im Linienraum. — Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades entsprechen so einzelne singuläre Strahlen, solchen höheren insbesondere zweiten Grades in Analogie zum Auftreten von Diskriminantenkurven, Diskriminantenregelscharen (Diskriminantenflächen). Zur Bestimmung der singulären Strahlen der einzelnen Integralregelscharen verwendet Verf. die Schmieghyperboloide der einzelnen Regelstrahlen. — Schließlich wird zu einer gegebenen Differentialgleichung eines Systems  $\mathcal{S}$  von  $\infty^1$  Regelscharen des linearen Strahlensystems  $A = 0$ ,  $B = 0$  die Differentialgleichung des zu  $\mathcal{S}$  konjugierten Systems von Regelscharen  $\mathcal{S}'$  [im Sinne von G. Haenzel, Geometrie der linearen Strahlenkongruenz II. (vgl. dies. Zbl. 14, 173)] aufgestellt. Dabei hat man sich auf elliptische und hyperbolische lineare Strahlensysteme zu beschränken. — Als Anwendung seiner Theorie behandelt Verf. die sgn. Trajektorflächen der elliptischen bzw. hyperbolischen linearen Strahlensysteme. Dabei handelt es sich um transzendente Regelflächen, deren Regelscharen zu den  $\infty^1$  Regelscharen eines sgn. Ringsystems (d. h. eines Systems von Regelflächen zweiten Grades, die zwei gegebene

„Leitflächen“ zweiten Grades umhüllen) konjugiert sind. — Zuletzt werden die Berührungstransformationen der linearen Strahlenkongruenz in sich bestimmt unter Verwendung von dreierlei Arten von „Elementen“: Streifenelemente in der Kongruenz, Kongruenzelemente im Komplex und Komplexelemente im Linienraum, die stets durch je 12 Elementkoordinaten festgelegt werden. Die weitere Entwicklung dieser Theorie führt auf zahlreiche Analogien zu bekannten Eigenschaften der Berührungstransformationen im Punktraum, es ist jedoch nicht möglich, auf die Fülle dieser (wie auch z. B. noch bei der Untersuchung der Trajektorflächen auftretenden) Ergebnisse einzugehen. — Im Anhang werden die Resultate der Untersuchung der zehn in Frage kommenden Typen von Trajektorflächen (geometrische Charakterisierungen, Verhalten singulärer Strahlen) in einer Tabelle zusammengestellt. *M. Pinl (Frag).*

### **Analytische und algebraische Geometrie:**

**Rimini, Cesare:** *Sulle iperomografie isotrope ed emisotrope.* Atti Accad. Sci. Torino **73**, 255—273 (1938).

Über den Begriff der isotropen und hemiisotropen Hyperhomographien (= Tensoren oder Affinoren) s. einen Aufsatz von Maria Pastori (dies. Zbl. **1**, 170). Der Verf. behandelt in dieser Abhandlung, die schon vor mehreren Jahren abgefaßt wurde, einige Eigenschaften solcher Tensoren vom absoluten Standpunkt aus. *L. Schrutka.*

**Srinivasiengar, C. N.:** *Lines of striction on a quadric — A supplementary note.* Math. Student **5**, 100—101 (1937).

**Mabille, André:** *Sur une surface du dixième ordre de l'espace à quatre dimensions.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **7**, 336—340 (1938).

**Defrise, P.:** *Les courbes multiples abéliennes sans points de diramation.* Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **24**, 313—332 (1938).

Fortsetzung früherer Untersuchungen über mehrfache algebraische Kurven (dies. Zbl. **15**, 172). Es sei  $\gamma_n^1$  eine Involution auf einer Kurve  $f$ ; es sei  $\varphi$  ein Bild der  $\gamma_n^1$ , so daß zwischen  $\varphi, f$  eine algebraische  $(1, n)$  Korrespondenz besteht. Der einfachste Fall ist derjenige, wo  $\gamma_n^1$  zyklisch ist, d. h. von einer birationalen Transformation von  $f$  in sich selbst erzeugt wird; dieser Fall ist in der oben zitierten Abhandlung untersucht worden. Hier wird der andere Fall untersucht, wo  $\gamma_n^1$  fixpunktfrei und von einer Abelschen Gruppe birationaler Transformationen auf  $f$  erzeugt wird. — Zunächst, im § 1, einige allgemeine Bemerkungen: Zwei Punktgruppen von  $\varphi$  werden ähnlich genannt, wenn ihre entsprechenden Punktgruppen auf  $f$  äquivalent sind; die Punktgruppen auf  $\varphi$ , die einer gegebenen Gruppe ähnlich sind, verteilen sich auf eine gewisse Anzahl vollständiger Linearscharen usw. — Im § 2 werden die Eigenschaften zusammengefaßt, die im Falle einer zyklischen  $\gamma_n^1$  bestehen. — Im § 3 werden jene Eigenschaften auf den Fall einer Abelschen  $\gamma_n^1$  ausgedehnt. Es werden folgende zwei Probleme gelöst: 1. die Bestimmung aller Gruppen von  $\varphi$ , die einer gegebenen Gruppe ähnlich sind (man findet, daß sie sich auf  $n$  vollständige Linearscharen verteilen); 2. die Bestimmung aller Kurven  $f$ , die eine Abelsche fixpunktfreie  $\gamma_n^1$  enthalten, welche auf einer gegebenen  $\varphi$  abbildbar ist. Zum Beweise wird eine Basis für die erzeugende Gruppe der  $\gamma_n^1$  eingeführt; so kann man die Untersuchung auf die Eigenschaften des zyklischen Falles (§ 2) reduzieren. — § 4 enthält die Anwendung auf den Fall, wo  $\varphi, f$  elliptisch sind. Man findet so wieder eine Reihe bekannter Sätze. Man findet auch folgendes: Wenn  $\varphi$  das Bild einer  $\gamma_n^1$  auf  $f$  ist, und wenn  $\gamma_n^1$  von einer Gruppe von Transformationen 1. Art von  $f$  in sich selbst erzeugt wird, so ist auch  $f$  das Bild einer ähnlichen  $\gamma_n^1$  auf  $\varphi$ , und die beiden erzeugenden Gruppen sind isomorph. *Togliatti.*

**Seemple, J. G.:** *Singularities of space algebraic curves.* Proc. London Math. Soc., II. s. **44**, 149—174 (1938).

This paper commences with a discussion of the nature of sequences of consecutive points  $E_1, \dots, E_k$  along a singular algebroid space branch. Such a sequence may be characterised by a matrix  $m$ , where  $m_{ij}$  is 1 if  $i = j$ ,  $-1$  if  $E_j$  is proximate to  $E_i$ ,



and zero otherwise. If the points are arranged in such an order that each is proximate to its immediate predecessor, and if  $\mathbf{n}$  is the inverse of the matrix  $\mathbf{m}$ , then the elements of the last column in  $\mathbf{n}$  give the multiplicities of the points  $E_1, \dots, E_k$  on a primitive curve branch passing simply through  $E_k$ . Some particular types of branches are considered, and it is emphasised that the multiplicities of the points of a consecutive sequence along a space branch are not in general the same as those of the points of a general plane projection of the branch. A set of necessary conditions is determined for the existence of an irreducible surface having assigned multiplicities at the various points of the sequence. — The author next discusses the two-dimensional resolution of a curve branch, in which curves passing through the origin of the branch and of its successive transforms are resolved. The resolution so obtained includes as a special case the resolution of the general plane projection of the branch, and is parallel to the resolution of successive points on the branch only when the matrix  $\mathbf{m}$  has the character of a two-dimensional proximity matrix. In general the relations between the successive points on the branch and a curvilinear surface branch touching the curve branch at its origin are complicated. The following result is obtained: If the three initial curves  $C, C', C''$  of a curvilinear surface branch  $f$  have multiplicities  $\mu, \mu', \mu''$ , where  $\mu'' \leq \mu' < \mu$ , and if  $E_{1+2}$  is the last of any general consecutive sequence of  $\lambda$  points proximate to a point  $E_1$  of  $C$  and to a neighbouring point  $E_2$  of  $f$  not on  $C$ , then of any consecutive sequence of points following  $E_{1+2}$  and all proximate to  $E_1$ ,  $f$  contains none unless  $\mu'' = \mu'$ , and then contains a number  $\sigma$  to multiplicity  $\mu'$  and one more to multiplicity  $\tau$ , where  $\sigma$  and  $\tau$  are quotient and remainder when  $\lambda(\mu - 2\mu')$  is divided by  $\mu'$ ; while of any similar sequence of points all proximate to  $E_2$ ,  $f$  contains none unless  $\mu'' < \mu'$ , and then contains a number  $\sigma'$  to multiplicity  $\mu''$  and one more to multiplicity  $\tau'$ , where  $\sigma'$  and  $\tau'$  are quotient and remainder when  $\lambda(\mu' - \mu)$  is divided by  $\mu''$ .

J. A. Todd (Cambridge).

### **Differentialgeometrie:**

**Bompiani, Enrico:** Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 2, 99—120 (1938).

Die Arbeit enthält eine vollständige systematische Untersuchung der infinitesimalen Umgebungen eines Flächenpunktes  $P$  bis zur vierten Ordnung einschließlich: Es ergibt sich so eine Reihe von Sätzen über die Lage und die Anordnung insbesondere der Kegelschnitte, welche in  $P$  eine Berührung 2-, 3- bzw. 4-ter Ordnung mit der Fläche haben. Es ist leider zu schwer, über die Einzelheiten in wenig Worten zu referieren. Die ganze Untersuchung ist projektiv invariant geführt. So lautet z. B. die projektive Fassung des Meusnierschen Satzes:  $E$  und  $E'$  seien zwei sich im Flächenpunkte  $P$  berührende Krümmungselemente der Fläche  $\Phi$ . Man erhält dann  $E'$ , indem man von einem Punkte der Tangentialebene von  $\Phi$  in  $P$  aus  $E$  auf die Ebene von  $E'$  projiziert. — Verf. findet außerdem in einem geeigneten Bezugssystem die folgende kanonische Entwicklung der Fläche:  $z = xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{24}(Px + Ty)(x^2 + y^2) + \dots$ , wobei  $P$  und  $T$  Invarianten der Fläche sind.

W. Feller (Stockholm).

**Thomas, Heinz:** Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen. Math. Z. 44, 233—265 (1938).

Die Parameterkurven  $u = \text{konst.}$ ,  $v = \text{konst.}$  der Fläche  $\tilde{x}(u, v)$  seien geodätische Linien; als Bild des „infinitesimalen Quadratnetzes“ der Achsenparallelen der  $u$ - $v$ -Ebene bilden sie ein inf. Vierecksnetz auf der Fläche. Man denke sich das Netz realisiert durch ein System von Fäden, die ohne Reibung in der Fläche geführt und alle durch gleich große Tangentialkräfte an den Enden gespannt werden. Es wird nach Flächen gefragt, auf denen solche Netze existieren mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkt der Druck auf die Fläche, den die beiden durch den Punkt laufenden Fäden infolge ihrer Spannung erzeugen, verschwindet. Das (in den Rand der Fläche eingespannte) Fadensystem bleibt also im Gleichgewicht, wenn man die Fläche entfernt;

„unverknottetes Fadenmodell“. Als Bedingung ergibt sich:  $\frac{1}{R_1} \cdot s'_1 + \frac{1}{R_2} \cdot s'_2 = 0$ , wo  $\frac{1}{R_i}$  die Normalkrümmung der Fläche in Richtung der Netzkurve und  $s'_i$  die Ableitung der Bogenlänge der Kurve nach dem betr. Parameter ( $u$  bzw.  $v$ ) ist. Es werden drehsymmetrische (schraubensymm.) Netze auf Drehflächen (Schraubenfl.) gesucht, die die Bedingungen a)  $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ , b)  $\frac{1}{R_1} \cdot s'_1 + \frac{1}{R_2} \cdot s'_2 = 0$ , c) a) + b) erfüllen. (Drehsymm. heißt: das Netz entsteht durch Rotation eines Kurvenpaares; schraubensymm. entsprechend.) Mit Hilfe der expliziten Formeln für die Geodätischen ergeben sich Differentialgleichungen für die Meridiane der Flächen. Die möglichen Meridiane werden aufgezählt und diskutiert. — Die einzige Minimalfläche mit Netzen a) oder c) ist die gemeine Wendelfläche. *Samelson (Zürich).*

**Argiriade, E.:** Géométrie axiale différentielle des courbes gauches. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 24, 465—510 (1938).

L'auteur examine par la voie de Wilczynski les courbes gauches  $\Gamma$  en géométrie dont le groupe fondamental est le sous-groupe projectif qui laisse invariant une droite donnée  $J$  qu'on prend comme première arête du tétraèdre coordonnées. La courbe est déterminée paramétriquement par quatre solutions d'une équation diff. linéaire du 4<sup>e</sup> ordre  $E_4$  dont les deux premières vérifient une équation  $E_2$  du 2<sup>e</sup> ordre. La recherche des invariants par rapport au changement du paramètre etc. conduit au delà des deux wronskiniens à un seul invariant relatif  $L$  du 4<sup>e</sup> ordre qui permet d'introduire l'élément linéaire  $ds$  ponctuel ou tangentiel. Les coefficients de  $E_2$  en variable indépendante  $s$  sont la courbure  $\varepsilon$  et la torsion  $t$  de  $\Gamma$ , elles déterminent  $\Gamma$ . Il existe un seul tétraèdre intrinsèquement lié au point considéré de  $\Gamma$  auto-dual du 4<sup>e</sup> ordre qu'on appelle principal ( $P$ ). L'auteur examine des courbes satellites décrites par un point invariablement lié à  $P$ , en particulier, des satellites planes dont les plans passent par  $J$  ou rectilignes dont les tangentes coupent  $J$  et détermine toutes les courbes  $J$  à courbure variable qui possède un ou deux satellites rectilignes. *S. Finikoff.*

**Lane, E. P., and M. L. MacQueen:** Surfaces whose asymptotic curves are twisted cubics. Amer. J. Math. 60, 337—344 (1938).

In this paper, the authors reduce the problem of determining all analytic non-ruled surfaces whose asymptotic curves are twisted cubics to the solution of an ordinary fifth order differential equation. Some types of solutions of the equation are discussed, and some known surfaces of the required kind are shown to fall among these types. *S. B. Myers (Ann Arbor).*

**Marcus, Ef.:** Interpretazione geometrica dell'equazione  $\frac{\partial^2 \log \beta \gamma}{\partial u \partial v} + \beta \gamma = 0$  e qualche proprietà delle congruenze di rette del fascio canonico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 145—148 (1938).

L'auteur examine les foyers des congruences décrites par les droites  $\lambda$  du faisceau canonique attaché au point générique d'une surface  $S$ . Quelle que soit  $S$  les foyers de l'axe de Čech sont conjugués par rapport à la quadrique osculatrice de  $S$  correlative à celle de Wilczynski. L'équation citée au titre caractérise les surfaces dont les foyers de la normale projective sont conjugués par rapport à la quadrique de Lie. On obtient une équation analogue pour une droite  $\lambda$  et une quadrique de Darboux arbitraires. *S. Finikoff (Moscou).*

**Inzinger, Rudolf:** Über Biegungsinvarianten von Zykelreihen. S.-B. Akad. Wiss. Wien, IIa 146, 567—579 (1937).

Werden die Raumpunkte  $P$  auf die Ebene  $\pi$  zyklographisch abgebildet, so nennt man nach E. Müller die Gesamtheit aller Zykel, die die Bilder der Punkte  $P$  einer Raumkurve  $K$  sind, eine Zykelreihe;  $P'$  sind die Mitten auf der Linie  $K'$ ,  $K_1$  und  $K_2$  sind die Hüllkurven der Zykel. Unter einer Verbiegung der Zykelreihe versteht man jede Formänderung, die die Bogenlängen von  $K'$  und die Radien der einzelnen Zykel un-



geändert läßt; im Raum gehört dazu die Verbiegung des durch  $K$  gehenden projizierenden Zylinders. Verf. gibt für einige Biegungsinvarianten 2. Ordnung eine geometrische Deutung und zeigt ihren Zusammenhang mit den Bewegungsinvarianten von  $K'$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ . Besonders ergeben sich anschauliche Sätze, wenn man einen Zykel der Reihe und die Tangente von  $K'$  in seinem Mittelpunkt festhält, so z. B. für die zugehörigen Krümmungsmitten von  $K_1$ ,  $K_2$ . Eine besondere Untersuchung ist den sog. Müller-schen Zykelreihen gewidmet. Eckhart (Wien).

● Takasu, Tsurusaburo: *Differentialgeometrien in den Kugelräumen. Bd. 1: Konforme Differentialkugelgeometrie von Liouville und Möbius.* Tokyo: Maruzen Comp., Ltd. 1938. XVIII, 458 S. geb. RM. 7.50.

Im vorliegenden ersten Band des von Verf. über das Gesamtgebiet aller Differentialkugelgeometrien geplanten dreibändigen Werkes ist vorerst der Stoff von 202 Abhandlungen (darunter 47 Originalabhandlungen des Verf.), sofern sie als wesentliche Beiträge zur Theorie konformkugelgeometrischer Probleme geschrieben worden waren, verarbeitet worden. Aus der Anlage des Gesamtwerkes läßt sich vielleicht auch die Inhaltseinteilung des ersten Bandes — ein kurzer erster Abschnitt und ein weit ausführlicherer zweiter — erklären. Der erste Abschnitt, „Einleitende Theorien“, kann auch als Einführung in die noch folgenden Bände angesehen werden, da nur sein erstes Kapitel die Grundlagen der konformen Kugelgeometrie behandelt, während das zweite, dritte und vierte Kapitel dieses Abschnittes der Laguerreschen und Lieschen Kugelgeometrie und den zwischen allen diesen sowie vornehmlich auch den beiden nichteuklidischen und der euklidischen Geometrie möglichen Übergangsprinzipien gewidmet ist. (Bekanntlich beruhen ja alle diese Übergangsmöglichkeiten auf gruppentheoretischen Zusammenhängen — „absolute“ Auszeichnung bestimmter invarianter Elemente als Übergang zu entsprechenden Untergruppen oder Faktorgruppen —, worauf indessen Verf. nicht weiter eingeht.) — So beginnt also die eigentliche Darstellung erst mit dem zweiten Abschnitt (Kapitel 5—10). Hier kommt es Verf. vornehmlich auf eine weitgehendst parallele Entwicklung von konforminvarianter Kugeldifferentialgeometrie und nichteuklidischer Differentialgeometrie an. Den allgemeinen ebenen Kurven als Hüllgebilden orientierter Tangenten stehen in der konformen Differentialkugelgeometrie allgemeine Kurvenpaare als Hüllgebilde doppeltorientierter Kreise gegenüber. Demgemäß behandelt Kapitel 5 die Theorie der sog. K-Kreisscharen als konformgeometrische Verallgemeinerung der Kurventheorie in einer nicht-euklidischen Ebene: allgemeine Theorie, begleitende Kreisscharen, spezielle Kreisscharen, Kreisscharen im Großen, darunter insbesondere die konformkugelgeometrische Verallgemeinerung der Frenetschen Formeln und ihre Dualisierung sowie (als Theorie im Großen!) diejenige des isoperimetrischen Problems, der Vierscheitelsätze usw. — Daran schließt (Kapitel 6) die Theorie der Kurvennetze (konformkugelgeometrisch gesprochen die Theorie zweiparametrischer Kreissysteme), insbesondere also die Behandlung orthogonaler und isothermer Netze sowie die der Wechselnetze erster und zweiter Art. — Den allgemeinen Raumkurven als Hüllgebilden orientierter Schmiegeebenen stehen in der konformen Differentialkugelgeometrie allgemeine Raumkurvenpaare als Hüllgebilde einer Schar doppeltorientierter Kugeln gegenüber. Demgemäß behandelt Kapitel 7 die Theorie der Kugelscharen als konformkugelgeometrische Verallgemeinerung der Kurventheorie im nichteuklidischen Raum: allgemeine Theorie, begleitende Kugelscharen, spezielle Kugelscharen, Kugelscharen im Großen, darunter z. B. Kugelscharen konstanter Breite nach Fujiwara, Blaschke und Barbier, räumliche Vierscheitelsätze usw. — Als interessantestes Kapitel kann man das achte ansehen, worin die Theorie der Kugelkongruenzen entwickelt wird. Für die auch hier vorherrschende nichteuklidische Auffassung der konformen Kugelgeometrie hat man vornehmlich die Korrespondenz der Begriffe allgemeine Fläche als Hüllgebilde orientierter Tangentialebenen, Flächenpunkt, abwickelbare Flächen, Minimalflächen im Raume einer nichteuklidischen Differentialgeometrie zu den Begriffen allgemeines Flächenpaar als Hüllgebilde einer Kongruenz doppeltorientierter Kugeln, Paar doppeltorientierter Punkte, Krümmungskugelkongruenzen, Zentralkugelkongruenzen (Konformminimalflächen) zu beachten. Unter den speziellen Kongruenzen fehlen hier natürlich auch die bekannten Ribaucourschen Kugelsysteme nicht. — Mehr speziellen, doch gleichwohl recht eingehenden Charakter zeigen die Ausführungen von Kapitel 9 als konformkugelgeometrische Verallgemeinerung der Theorie der Regelflächen: Kreisflächen als Ort doppeltorientierter Kreise im konformen Kugelraum mit zahlreichen Beziehungen zu den Resultaten verschiedener bekannter Untersuchungen von W. Blaschke, E. Vessiot, G. Thomsen, A. Besserve, E. Study und anderen. — Der Band schließt in Kapitel 10 mit einer Erörterung dreifach orthogonaler Systeme im konformen Kugelraum. M. Pinl (Prag).

Schirokow, P.: *Sur les directions concourantes dans les espaces de Riemann.* Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. 7, 77—87 u. franz. Zusammenfassung 87—88 (1936) [Russisch].

Hlavatý, V.: *Système de connexions de M. Weyl*. Extrait de: Bull. int. Acad. Sci. Bohême. 4 pag. (1936).

Die Arbeit enthält einige Identitäten für die zwei für die konforme Geometrie der  $V_n$  wichtige Affinoren  $L_{\lambda\kappa}$  und  $C_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$  (vgl. J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, Noordhoff 1938).  $L_{\lambda\kappa}$  ist nicht konforminvariant und  $\nabla_{[\mu} L_{\lambda]\kappa}$  nur wenn  $C_{\nu\mu\lambda}^{\dots\kappa}$  verschwindet. Im Falle der Raum nicht konformeuklidisch ist und  $a_{\lambda\kappa}$  definit ist, kann mit Hilfe eines Pseudoskalars eine konforminvariante Übertragung definiert werden. (Vgl. dies. Zbl. 11, 175.)

J. Haantjes (Amsterdam).

Kosambi, Damodar: *Les espaces des paths généralisés qu'on peut associer avec un espace de Finsler*. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1538—1541 (1938).

Es sei  $K_n$  ein Raum mit einem gegebenen Bahnsystem

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \alpha^i \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right) = 0. \quad (1)$$

Wird  $t$  als neue Variable und  $s$  als neuer Parameter eingeführt, so ist es möglich, ein System von  $n+1$  Gleichungen von der Form

$$\ddot{x}^* + A^*(x, \dot{x}) = 0 \quad \left( \dot{x} = \frac{dx}{ds} \right) \quad (2)$$

zu erhalten. Dieses System bestimmt ein Bahnsystem in einem  $(n+1)$ -dimensionalen Raum  $B_{n+1}$ . Es handelt sich um die Frage: Ist es möglich, das System (2) aus einer Variation (Finslersche Metrik) zu erhalten, wenn dies für das System (1) möglich ist und umgekehrt. Einige Theoreme über den Zusammenhang zwischen  $K_n$  und  $B_{n+1}$  werden abgeleitet. Für die Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

J. Haantjes (Amsterdam).

Cairns, Stewart S.: *Normal coordinates for extremals transversal to a manifold*. Amer. J. Math. 60, 423—435 (1938).

The author is concerned with a Finsler manifold  $R$ , i.e., an ordinary  $n$ -dimensional manifold of class  $C^2$ , with an invariant length metric  $ds = F(x, dx)$ . The functions  $F(x, r)$  and  $F_r(x, r)$  are to be of class  $C'$ , while  $F$  is to be positive, positive-regular, and positive homogeneous of first order in  $(r)$ . Under these weak hypotheses, the existence of normal coordinates with an arbitrary point  $O$  of  $R$  as origin is proved, together with the continuous differentiability of the functions of transformation from coordinates  $(x)$  to normal coordinates. Then, given any differentiable  $(m)$ -manifold  $M$  in  $R$ , coordinates  $(z)$  about a point  $O$  of  $M$  are set up such that  $z^{m+1} = \dots = z^n = 0$  define  $M$ , while  $(z_{m+1}, \dots, z_n)$  are the usual normal coordinates about  $O$  in the geodesic manifold  $\bar{M}$  transversal to  $M$  at  $O$ . In general,  $O$  is a conical point of  $\bar{M}$ . However, it is shown that if  $m = n - 1$ , a necessary and sufficient condition that  $M$  be continuously differentiable even at  $O$  is that  $F(x, r) \equiv F(x, -r)$  (the reversible case). If  $0 < m < n - 1$ , a necessary and sufficient condition for the same result is that  $F$  be a Riemannian metric  $\sqrt{a_{ij} r^i r^j}$ .

S. B. Myers (Ann Arbor).

## Topologie:

Johansson, Ingebrigt: *Über singuläre Elementarflächen und das Dehnsche Lemma*. II. Math. Ann. 115, 658—669 (1938).

Fortsetzung der Arbeit in Math. Ann. 110, 312—320 (1934) (dies. Zbl. 9, 328). Es wird gezeigt, daß das Dehnsche Lemma in nichtorientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten gilt, falls es in allen orientierbaren richtig ist. Ferner wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Realisierbarkeit eines Dehn-Diagrammes in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit angegeben.

H. Seifert.

Scorza Dragoni, Giuseppe: *Sul teorema generale di traslazione*. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 8, 83—91 (1937).

$T$  sei eine die Orientierung erhaltende topologische Abbildung der zweidimensio-



nalen Kugelfläche  $s$  auf sich mit genau zwei Fixpunkten  $O_1$  und  $O_2$ . Ein  $T$ -Feld sei ein solches von einer Kurve  $\gamma$  und seinem Bild  $T\gamma$  begrenztes Gebiet auf  $s$ , das mit seinem Bild bei  $T$  keinen Punkt gemeinsam hat. — Wie Verf. bemerkt, würde die Kombination verschiedener von Brouwer und v. Kérékjartó ohne vollständige Beweise angegebenen Resultate zu folgenden beiden Sätzen führen: I. Jeder von  $O_1$  und  $O$  verschiedene Punkt von  $S$  ist immer Punkt eines  $T$ -Feldes. II. Die in der Definition eines  $T$ -Feldes auftretende Kurve  $\gamma$  ist entweder 1. eine geschlossene Jordankurve und hat a) mit  $T\gamma$  keinen Punkt gemeinsam oder b) genau einen Punkt, und dies ist einer der Punkte  $O_1, O_2$ ; oder 2.  $\gamma$  ist ein Jordanbogen mit  $O_1$  und  $O_2$  als Endpunkten, der mit  $T\gamma$  nur diese Punkte gemeinsam hat. Verf. gibt eine Transformation  $T$  der obigen Art an, für die unter den  $T$ -Feldern die Typen 1b und 2 nicht existieren und nicht jeder Punkt in einem  $T$ -Feld des Typus 1a liegt, so daß einer der beiden Sätze I, II falsch sein muß.

H. Busemann (Princeton, N. J.).

**Pontrjagin, Léon:** Classification des transformations d'un complexe  $n + 1$ -dimensionnel dans une sphère  $n$ -dimensionnelle. C. R. Acad. Sci., Paris 206, 1436—1438 (1938).

Let  $f$  and  $g$  be two mappings of an  $n > 1$ -complex  $K^{n+1}$  on an  $n$ -sphere  $S^n$ , and let  $K^n$  be the  $n$ -complex composed of all  $p$ -simplexes,  $p \leq n$ . To the mappings of  $K^n$  on  $S^n$  determined by  $f$  and  $g$  there correspond  $n$ -chains  $c(f, K^n)$  and  $c(g, K^n)$  which are cocycles of  $K^{n+1}$  and which are cohomologous if and only if  $f$  and  $g$  are homotopic over  $K^n$  [see Hopf, Comment. math. helv. 5, 39—54 (1933); this Zbl. 5, 313; also Whitney, Duke Math. J. 3, 51—55 (1937); this Zbl. 16, 229]. But if  $f$  and  $g$  are homotopic over  $K^n$  they may be varied homotopically in  $K^{n+1}$  to coincide over  $K^n$ . So it suffices to consider  $f = g$  over  $K^n$ , in which case  $f$  and  $g$  determine for each  $n + 1$ -simplex  $T_i$  a mapping  $h_i$  of  $S^{n+1}$  on  $S^n$ , since two copies of  $T_i$  with common boundary form an  $S^{n+1}$ . The author then states the theorem that  $f$  and  $g$  (where  $f = g$  over  $K^n$ ) are homotopic if and only if (a)  $n > 2$ , each  $h_i$  is non-essential [cf. C. R. Acad. Sci. URSS 19, 361 (1938)] (b)  $n = 2$ ,  $\sum \gamma_i T_i \sim 2x \cdot c(f, K^2)$  when  $x$  is some 1-cocycle and  $\gamma_i$  is the Hopf invariant of the mapping  $h_i$  [Math. Ann. 104, 637—665 (1931); this Zbl. 1, 407].

A. W. Tucker (Princeton).

**Puckett jr., W. T.:** A theorem concerning homologies in a compact space. Fundam. Math. 31, 22—26 (1938).

Es sei  $M$  ein kompakter metrischer Raum und  $M'$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $M$ , welche alle zyklischen Elemente  $r$ -ter Ordnung von  $M$  enthält (Whyburn, vgl. dies. Zbl. 8, 277). Verf. beweist: Ist  $Z^{r+1}$  ein vollständiger  $(r + 1)$ -dimensionaler Zyklus in  $M$ , so existiert ein vollständiger Zyklus  $\tilde{Z}^{r+1}$  in  $M'$  derart, daß  $Z^{r+1} \sim \tilde{Z}^{r+1}$  in  $M$  [alles mod. 2; zu den Definitionen vgl. Vietoris, Math. Ann. 97, 454—472 (1926); Alexandroff, Ann. of Math., II. s. 30, 101—187 (1928)].

Nöbeling.

**Lefschetz, S.:** On chains of topological spaces. Ann. of Math., II. s. 39, 383—396 (1938).

In this paper, the author develops a theory of chains in a compact metric space  $\mathfrak{R}$  by utilizing the general Vietoris approach to homology theory. Let  $\{K^i\}$  be an infinite sequence of simplicial complexes with vertices in  $\mathfrak{R}$  and of increasingly fine mesh. Assume that there exist (abstract) deformations  $\pi_i: K^{i+1} \subset K^i$  such that for every  $\varepsilon > 0$  an  $n$  can be found such that for  $i > j > n$ ,  $\pi_{j-1} \dots \pi_i$  is an  $\varepsilon$ -deformation. A sequence  $c_q = \{C_q^i\}$  where  $C_q^i$  is a  $q$ -chain in  $K^i$  with coefficients in an abelian group  $\mathfrak{G}$  and where  $\pi_i C_q^{i+1} = C_q^i$ , is called a  $q$ -dimensional projection-chain ( $\mathfrak{P}$ -chain) in  $\mathfrak{R}$  over  $\mathfrak{G}$ . In order to define the addition of  $\mathfrak{P}$ -chains, the author introduces equivalence with respect to finite sequences of "regular deformations". A natural definition of the addition of equivalence classes leads eventually to the definition of certain abelian groups  $G_q$ , called the groups of  $\mathfrak{P}$ -chains of  $\mathfrak{R}$  over  $\mathfrak{G}$ . There is readily defined a "boundary operator"  $F$  which maps  $G_q$  homomorphically into a subgroup of  $G_{q-1}$ .



The homology groups which are now defined in the customary manner, are essentially different from those defined in terms of singular chains, as a simple example shows. — In terms of  $\mathfrak{P}$ -chains, the author also develops a theory of local connectedness. The three types introduced are denoted by  $LC^n(\mathfrak{P})$ ,  $LC^*(\mathfrak{P})$ ,  $LC^{**}(\mathfrak{P})$ . It is shown in outline and on the basis of a fundamental deformation theorem that if  $\mathfrak{R}$  is  $LC^{**}(\mathfrak{P})$  the homology groups of  $\mathfrak{R}$  are those of a point; if  $\mathfrak{R}$  is  $LC^*(\mathfrak{P})$ , they are those of a finite complex and all above a certain dimension vanish; if  $\mathfrak{R}$  is  $LC^n(\mathfrak{P})$ , they are those of a finite  $n$ -dimensional complex. Smith (New York).

**Kuratowski, Casimir:** Sur la compactification des espaces à connexité  $n$ -dimensionnelle. *Fundam. Math.* 30, 242—246 (1938).

Let  $X$  be a separable metric space. It has  $n$ -dimensional connection between two points  $p$  and  $q$  if there is no open set  $G$  containing  $p$  such that  $q$  lies in the complement of the closure  $\bar{G}$  of  $G$  and the dimension of the frontier of  $G$  is less than  $n$ . The greatest such integer  $n$  is the dimension of the connection between  $p$  and  $q$ . The space  $X$  is compactifiable without increasing the dimension of the connection between any pair of points. Let  $C$  denote the nowhere dense linear perfect set of Cantor. In the functional space  $C^X$ , the functions  $f$  such that  $f^{-1}(y)$  is a quasi-component of  $X$  for every  $y$  in  $f(X)$  form a residual set. Let  $I^\infty$  denote the fundamental cube of the Hilbert space and  $S = (I^\infty)^X$  denote the functional space of all continuous transformations of  $X$  into subsets of that cube. Then the homeomorphisms  $f$  in  $S$ , such that the order of connection between  $p$  and  $q$  is equal to that of the closure of  $f(X)$  between  $f(p)$  and  $f(q)$  whenever that order is finite, together form a residual set in  $S$ .

E. W. Chittenden (Iowa City, Iowa).

**Pospíšil, Bedřich:** Sur les caractères des points dans les espaces topologiques. *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk* Nr 256, 1—23 (1938).

Ist  $R$  ein Raum, dessen Topologie gegeben ist durch Systeme  $\Omega(p)$  von Umgebungen seiner Punkte  $p$ , so heißt Charakter eines Punktes  $p$  von  $R$  die kleinste Mächtigkeit eines zu  $\Omega(p)$  äquivalenten Systems. Im Kap. I wird im wesentlichen gezeigt, daß die Ungleichung  $\alpha_p \leq 2^e$  notwendig und hinreichend ist für die Existenz eines regulären (oder normalen) Raumes der unendlichen Mächtigkeit  $e$ , in dem der Charakter jedes Punktes  $p$  gleich einem vorgegebenen  $\text{Aleph } \alpha_p$  ist. In II wird bewiesen, daß die Charaktere der Punkte eines regulären Raumes  $\leq 2^h$  sind, wobei  $h$  die Mächtigkeit einer im Raum dichten Menge ist. III enthält einen zum Satz des Kap. I analogen Satz. IV enthält mehrere notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines regulären Raumes mit vorgegebenen Punktcharakteren und vorgeschriebenem dichtem Teil. V enthält analoge Resultate für allgemeinere Räume. Verf. schließt mit einigen ungelösten Problemen. Nöbeling (Erlangen).

## Mathematische Physik.

**Oseen, C. W.:** Probleme der geometrischen Optik. (*Oslo*, 14.—18. VII. 1936.) *C. R. congr. int. Math.* 1, 171—185 (1937).

The author discusses the work of A. Gullstrand, chiefly in connection with the form of the caustic surface of a normal congruence of rays, and deals briefly with his own method (this *Zbl.* 16, 90). The author refers to the use of Hamilton's characteristic function in this connection, but does not seem aware that Hamilton (*Mathematical Papers* 1, 40) gave the details of the application of his method to the problem of aberration. J. L. Synge (Toronto).

**Ewald, P. P.:** Elektrostatische und optische Potentiale im Kristallraum und im Fouriererraum. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* II, N. F. 3, 55—64 (1938).

The atomic or crystal lattice is built up from 3 steps  $a_i$ , a lattice vector  $a_i$  being given by  $a_i = \sum l_i a_i$  where the coefficients  $l_i$  are integers. The steps  $b_i$  of the reciprocal lattice (now called the Fourier lattice) are such that  $(a_i, b_k) = \delta_{ik}$ . With a continuous



distribution of masses in the atomic lattice a weight  $F_h$  may be associated with the lattice vector  $b_h = \sum_k h_k b_k$ , the weight being defined as a coefficient in the Fourier expansion of the density  $\rho(r)$  at the place specified by the vector  $r = \sum x_i a_i$  in which the coefficients  $x_i$  are arbitrary real quantities. Consequently  $\rho(r) = \sum F_h e^{2\pi i(b_h r)}$ , and in the particular case of a discontinuous basis of  $Z$  atoms which can be specified by  $4Z$  parameters the  $\infty^3$  Fourier coefficients  $F_h$  can be expressed linearly in terms of  $4Z$  linearly independent quantities. — For a crystal lattice of Gaussian atoms if  $\rho_i(r) = m(\pi\alpha^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-(r-a_i)^2/\alpha^2}$  where  $\alpha$  gives the "size" of the atom, the total density is  $\rho(r) = \sum \rho_i(r)$  and  $F_h = (m/v_a) e^{-\pi^2 \alpha^2 b_h^2}$ . The fact that on account of the influence of temperature the quantities  $F_h$ , found experimentally from X-ray intensities, diminish like  $e^{-\alpha^2 b_h^2}$  can be interpreted to mean that on account of the heat motion the atomic masses are effectively spread around the lattice points according to the Gaussian law of distribution. — By using a limiting form of the Gaussian charge distribution an expression

$$U(r) = \sum_i \frac{e}{4\pi|r-a_i|} = (e/v_a) \sum (4\pi^2 b_h^2)^{-1} e^{2\pi i(b_h r)}$$

is obtained for the electrostatic potential of the point charges. This formula is extended to a lattice sum with phase shift,  $b_h^2$  being replaced by  $b_h^2 - k^2$  and  $(e/v_a)$  by  $(p/v)$ . The importance of a method of computing lattice potentials by using a place of separation in the series and a formula of transformation indicated previously by the author [Ann. Physik 64, 253 (1921)] is emphasized.

H. Bateman (Pasadena).

**Podolsky, Boris:** On Eddington's treatment of Dirac's equation. Phys. Rev., II. s. 53, 591—594 (1938).

Es wird gezeigt, daß Eddingtons Ableitung (dies. Zbl. 15, 422) der Diracschen Wellengleichung „aus erkenntnistheoretischen Prinzipien“ implizite die üblichen physikalischen Annahmen enthält. Auch wird seine Ableitung der relativistischen Invarianz nur dann physikalisch sinnvoll, wenn man sie mit einer Hypothese hinsichtlich der physikalischen Interpretation der Wellenfunktionen verbindet, die als Verallgemeinerung der üblichen Annahme betrachtet werden kann.

O. Klein (Stockholm).

**Schönberg, Mario:** Relativistic commutation rules in the quantum theory of fields. Physica, Haag 5, 553—560 (1938).

Elegante Entwicklung der Zusammenhänge zwischen den „dreidimensionalen“ und „vierdimensionalen“ Vertauschungsregeln in der Quantelung des Maxwell'schen Feldes und des Diracschen Wellenfeldes. Das Verhältnis der Greenschen Funktion der betreffenden Wellengleichung zur Singularität der vierdimensionalen Vertauschungsregeln wird klargestellt.

P. Jordan (Rostock).

**Madhava Rao, B. S.:** Question of invariance in the neutrino theory of light. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 7, 293—295 (1938).

Es wird (ähnlich wie seitens Pryce) gezeigt, daß die Neutrinotheorie des Lichtes einer Schwierigkeit ausgesetzt ist in der Weise, daß der Zusammenhang von Neutrino-feld und elektromagnetischem Feld bei Anwendung der Kronigschen Konstruktion nicht lorentzinvariant wird. (Diese Schwierigkeit ist jedoch inzwischen durch eine modifizierte Konstruktion von Sokolov behoben worden.)

P. Jordan (Rostock).

**Laue, M. v.:** Zur Thermodynamik der Supraleitung. Ann. Physik, V. F. 32, 71—84 (1938).

Es wird die Gleichgewichtsbedingung zwischen supraleitendem und nichtsupraleitendem Zustand bei Vorhandensein eines Magnetfeldes thermodynamisch behandelt (unter Auffassung des supraleitenden Zustands als verschiedener Phase) und die Rutgersche Bedingung neu abgeleitet. Die Hinzunahme der Londonschen Elektrodynamik ermöglicht die Behandlung gekrümmter Grenzflächen und es wird die experimentell gefundene Abhängigkeit des Schwellenwerts des Magnetfeldes von der Drahtdicke (für sehr kleine Dicken) erklärt. Der Vergleich mit der Erfahrung ergibt eine Bestimmung der Londonschen Eindringungstiefe des Magnetfeldes in den Supraleiter.

Nordheim.